Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

НОВОУРАЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра общенаучных дисциплин

УТВЕРЖДЕНА
Ученым советом НТИ НИЯУ МИФИ
Протокол №1 «30 января» 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «Математика»

1 – 3 семестры

Направление подготовки: **09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»**
Профиль подготовки: «Автоматизированные технологии и бизнес-аналитика»
Квалификация (степень) выпускника: Бакалавр

Форма обучения: очно-заочная

г. Новоуральск – 2024

Рабочая программа учебной дисциплины «Математика» для
09.03.01 Информатика и вычислительная техника
Курс 1, 2 семестры 1, 2, 3
Объём учебных занятий в часах:

Аудиторные занятия:

1 семестр: лекции –36, практика – 18, всего 54 ч., 3 ЗЕТ;
2 семестр: лекции – 18, практика – 18, всего 36 ч., 4 ЗЕТ;
3 семестр: лекции – 36, практика – 18, всего 54 ч., 4 ЗЕТ;

Контроль: 178 ч.

Самостоятельная работа: 36, 81, 72 ч., всего 189ч.

Общий объём курса – 396 ч.
Трудоёмкость 3+4+4=13 ЗЕТ

Форма отчётности –

1 семестр: экзамен;
2 семестр: экзамен;
3 семестр: экзамен.

Направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»
Естественно-научный модуль

Учебную программу составил ст. преподаватель каф. ОНД НТИ НИЯУ МИФИ
Орлов Юрий Владимирович

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения учебной дисциплины "Математика" является воспитание достаточно высокой математической культуры, развитие у студентов широкого кругозора в области математики и умения использовать математические методы и основы математического моделирования для решения практических задач.

2 МЕСТО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Данная учебная дисциплина входит в Естественнонаучный образовательный модуль раздела Б1.О.02 Естественнонаучный модуль ФГОС-3 по направлению подготовки ВПО 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» профиля подготовки бакалавров " Инфоромационные технологии и бизнес-аналитика" очно-заочной формы обучения.

Методы, развиваемые в курсе, являются базовыми при изучении других компонентов цикла. Вместе с курсом «Математика» студенты этой группы изучают и другие математические дисциплины:

«Теория вероятностей и мат. статистика» (Б1.О.02.04 Л – 10 ч., Пр – 6 ч., экз.),

«Мат. логика и теория алгоритмов» (Б1.О.02.05 Л – 18 ч., Пр – 18 ч., экз.),

3 КОМПЕТЕНЦИИ СТУДЕНТА, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ, ОЖИДАЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ И КОМПЕТЕНЦИИ СТУДЕНТА ПО ЗАВЕРШЕНИИ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Данная дисциплина участвует в формировании следующих **компетенций:**

ОКП-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;

УКЕ-1 Способен использовать знания естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в поставленных задачах;

В14 Формирование глубокого понимания социальной роли профессии, позитивной и активной установки на ценность избранной специальности, ответственного отношения к профессиональной деятельности, труду;

В15 Формирование психологической готовности к профессиональной деятельности по избранной профессии.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать основные понятия векторной и линейной алгебры, основы аналитической и дифференциальной геометрии, основные понятия дифференциального и интегрального исчисления.

Уметь применять математические методы векторной и линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, теорию рядов и дифференциальных уравнений при решении конкретных инженерных задач.

Владеть: методами решения систем линейных уравнений, методами нахождения ранга матрицы и обратной матрицы, методами решения типовых задач по темам: прямая на плоскости, плоскость и прямые в пространстве, методами исследования функций и построения их графиков, методами решения типовых задач геометрии и физики на основе интегрального исчисления, методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений I и II порядка, методами исследования сходимости числовых и функциональных рядов.

Дисциплина изучается 3 семестра и включает следующие разделы:

- матрицы и системы линейных уравнений,
- основы векторной алгебры,
- прямая на плоскости,
- плоскости и прямые в пространстве,
- кривые и поверхности второго порядка,
- дифференциальное исчисление функций одной переменной,
- применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков,
- интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения,
- функции нескольких переменных, их оптимизация,
- числовые и функциональные ряды,
- ряд и интеграл Фурье,
- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- системы дифференциальных уравнений.

4 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 1 семестр

<table>
<tr><th rowspan="2">Недели</th><th rowspan="2">Тема</th><th colspan="3">Виды учебной деятельности</th><th colspan="3">Отчётность</th></tr>
<tr><th>Лекции</th><th>Практики</th><th>СРС</th><th>вид</th><th>выдача</th><th>сдача</th></tr>
<tr><td>1-2</td><td>Матрицы, определители</td><td>4</td><td>2</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">ТР №1.1</td><td rowspan="3">2 н.</td><td rowspan="3">6 н.</td></tr>
<tr><td>3-4</td><td>Решения линейных систем</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Общее решение линейной системы</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6-7</td><td>Действия над векторами</td><td>4</td><td>2</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">ТР №1.2</td><td rowspan="2">6 н.</td><td rowspan="2">9 н.</td></tr>
<tr><td>8-9</td><td>Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10-11</td><td>Прямая на плоскости</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>12</td><td>Плоскость в пространстве</td><td>4</td><td>2</td><td rowspan="5">10</td><td rowspan="5">ТР №2</td><td rowspan="5">11 н.</td><td rowspan="5">18 н</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Прямая в пространстве</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>14-15</td><td>Линии 2-го порядка</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Поверхности 2-го порядка</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>17-18</td><td>Преобразования плоскости и пространства. Приведение линий и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Итого:</td><td>36</td><td>18</td><td>36</td><td>2 ТР</td><td colspan="2">Экзамен</td></tr>
</table>

ТР №1.1 «Матрицы. Линейные системы»,
ТР №1.2 «Векторы»,
ТР №2 «Линии и поверхности».

4.2 2 семестр

Недели	Тема	Виды учебной деятельности			Отчётность		
		Лекции	Практики	СРР	вид	выдана	сдана
1	Предел последовательности	2	4	14	ТР №3.1	1 н.	4 н.
2-3	Пределы функции	4	4				
4	Непрерывность функции	2	2				
5-7	Производная для f(x)	2	4	16	ТР №3.2	5 н.	10 н.
8	Экстремум f(x)	2	2				
9	Исследование f(x), построение её графика	2	4				
10	Задачи оптимизации f(x)	2	4				
11	Неопределённый и определённый интегралы	4	2	17	ТР №4	11 н.	18 н
12-13	Замена переменной и интегрирование по частям в интегралах	4	2				
14-15	Вычисления интегралов	4	2				
16-17	Применения интегралов	6	2				
18	Несобственные интегралы	2	2				
Итого:	**36**	**18**	**18**	**81**	**2 ТР**	**Экзамен**	

ТР №3.1 «Пределы, графики и непрерывность функции».
ТР №3.2 «Производная функции одной переменной»,
ТР №4 «Интегрирование».

4.3 3 семестр

Недели	Тема	Виды учебной деятельности			Отчётность		
		Лекции	Практики	СРС	вид	выдача	сдача
1	Сходимость числовых рядов	4	1	10	ТР №5	2 н.	5 н.
2	Функциональные ряды	2	1				
3-4	Применение степенных рядов	4	2				
5-6	Ряд Фурье и интеграл Фурье	2	1	10			
7-8	Функции нескольких переменных (ФНП)	4	1	10	ТР №6	8 н.	10 н.
8-9	Экстремумы ФНП	4	1				
10-12	ДУ первого порядка	2	1	10		10 н.	12 н.
13	ЛОДУ	2	2	8			
14	ЛНДУ	4	2	10	ТР №7	13 н.	16 н.
15	Анализ механических и электрических колебаний	2	2				
16-17	Системы ДУ	2	2	14			
18	Анализ колебаний двух функций	4	2				
Итого:		**36**	**18**	**72**	**3 ТР**	**экзамен**	

ТР №5 «Числовые и функциональные ряды»,
ТР №6 «Функции нескольких переменных»
ТР №7 «Диф. уравнения и их системы»,

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 11 единиц ЗЕТ, 396часов.

5 СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

5.1 Содержание 1 семестра

Матричное исчисление

1. Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц.
2. Определители второго и третьего порядка: определение, правило вычисления и основные свойства. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента, раскрытие определителя по строке или столбцу.
3. Общее определение определителя n-го порядка. Задача о расстановке ладей на шахматной доске. Вычисление определителя четвёртого порядка.
4. Обратная матрица: определение, теорема о существовании обратной матрицы (способ нахождения A^{-1}), проверка полученного результата.

Решения систем линейных уравнений

5. Система линейных уравнений, определение ее решения. Метод Крамера нахождения решений линейной системы. Теорема Крамера. Матричная запись линейной системы. Матричный метод нахождения решения линейной системы.
6. Метод Гаусса и Жордана-Гаусса решения линейной системы. Случаи единственного решения, множества решений и отсутствия решений.
7. Однородная линейная система, существование ее нетривиального решения, базисные и свободные переменные при этом.

Векторное исчисление

8. Скалярные и векторные величины. Способы задания векторов. Действия над векторами (графически): сравнение, умножение на число, сумма и разность. Основные свойства действий над векторами.
9. Линейная зависимость системы векторов. Размерность векторного пространства (прямой, плоскости, пространства). Афинный базис, афинные координаты вектора, нахождение их геометрически.
10. Скалярное произведение векторов: определение, основные свойства. Косинус угла между векторами. Модуль вектора. Проекция вектора на ось.
11. Декартова система координат, базисные векторы. Декартовы координаты вектора, запись вектора через базисные. Связь точек и векторов. Сравнение, умножение на число, сумма, разность векторов в координатной форме.
12. Вывести правило скалярного произведения векторов в декартовых координатах. Модуль вектора, расстояние между точками и угол между векторами в координатной форме.
13. Правая тройка векторов. Векторное произведение: определение и основные свойства, геометрический смысл, синус угла между векторами.
14. Вывести векторное произведение двух векторов в координатной форме. Площадь треугольника, заданного координатами вершин с помощью векторного произведения.
15. Смешанное произведение: определение, основные свойства и правило вычисления в координатной форме, геометрический смысл, проверка линейной зависимости.

Прямая на плоскости

16. Способы задания линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве по Декарту и Жордану. Полярная система координат.
17. Уравнения прямой на плоскости: векторное, параметрическое, через две точки, каноническое, с угловым коэффициентом, общее, в отрезках и нормальное. Связь направляющего и нормального векторов прямой.
18. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (по уравнениям), параллельность, перпендикулярность, точка пересечения. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Проекция точки на прямую.

Плоскость и прямая в пространстве

19. Уравнения плоскости в пространстве: векторное, параметрическое, через три точки (точку и два направляющих вектора), общее, в отрезках и нормальное
20. Связь нормального и направляющих векторов плоскости. Взаимное расположение плоскостей (параллельность, совпадение, пересечение, перпендикулярность) по уравнениям. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.
21. Уравнения прямой в пространстве: векторное, параметрическое, по двум точкам, каноническое, общее, через проектирующие плоскости.
22. Взаимное расположение прямой и плоскости: параллельность, пересечение, перпендикулярность, проекция точки на плоскость, симметрия точки относительно плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
23. Взаимное расположение двух прямых в пространстве по уравнениям: пересечение (точка пересечения), параллельность (расстояние), скрещивание (наименьшее расстояние).

Линии и поверхности второго порядка

24. Эллипс: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
25. Гипербола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
26. Парабола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
27. Общее уравнение линии второго порядка, приведение к каноническому уравнению по общему (при отсутствии $x \cdot y$) выделением полных квадратов.
28. Директориальное свойство эллипса и гиперболы, правило нахождения их канонического уравнения.
29. Нахождение уравнения окружности по трем точкам.
30. Классификация линий второго порядка на плоскости. Цилиндрические и конические сечения.
31. Канонические уравнения и эскизы поверхностей второго порядка: эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов.
32. Линейчатые поверхности (гиперболоид и параболоид). Цилиндрические и конические поверхности. Классификация поверхностей второго порядка.

Функции одной переменной

36. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимообратных функций.
37. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.

38. Преобразования, влияющие на график функции ($f(x)+c$, $f(x+c)$, $c \cdot f(x)$, $f(c \cdot x)$, $|f(x)|$, $f(|x-c|)$. Графики линейной, параболической, дробно-линейной функций и $y=A \cdot \sin(\omega \cdot x + \omega_0)$.

5.2 Содержание 2 семестра

Предел и непрерывность функции одной переменной

1. Определение числовой последовательности и её предела. Свойства пределов последовательности.
2. Определение предела функции в точке. Бесконечный предел и предел на бесконечности. Свойства пределов.
3. Бесконечно малая функция (БМ). Сравнение БМ: эквивалентность, символ "о". Доказательство первого замечательного предела, его применение. Основные эквивалентности БМ в пределах.
4. Бесконечно большая функция (ББ). Сравнение ББ: эквивалентность, символ "О". Шкала ББ при $x \to\infty$, её применение.
5. Связь БМ, ББ и других функций. Основные виды неопределенностей в пределах, способы их раскрытия. Второй замечательный предел, правило его применения.
6. Непрерывность функции в точке. Частичные пределы, их связь с непрерывностью. Точки разрыва функции, их классификация.
7. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства непрерывных в точке функций.
8. Свойства непрерывных на отрезке функций (с доказательствами): сохранение знака, ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, поиск корня $f(x)=0$ методом половинного деления, промежуточные значения на отрезке.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

9. Производная функции $f(x)$: определение, геометрический смысл с уравнением касательной и нормали, физический смысл. Свойства производных.
10. Производные основных функций (x^n, a^x, $ln(x)$, $sin(x)$, $cos(x)$) с доказательствами.
11. Приращение дифференцируемой функции, понятие дифференциала и его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы дифференциала, его применение в приближенных вычислениях.
12. Производная обратной функции. Выведение производных arcsin(x), arctg(x). Производная неявно заданной функции.
13. Логарифмическое дифференцирование. Понятие гиперболических функций, их производные.
14. Свойства дифференцируемых на отрезке функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши
15. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, её коэффициенты и остаточный член в формах Пеано и Лагранжа.
16. Разложения sin(x), cos(x), e^x, ln(1+x), $(1+x)^n$ по формуле Маклорена.
17. Производные $y_x'(x)$, $y_{xx}''(x)$, $y_{xxx}'''(x)$ … для функции, заданной параметрически.
18. Определение точки экстремума. Связь монотонности функции и знака ее

производной. Теорема Ферма (необходимое условие точек экстремума). Достаточные условия экстремума:

а) с помощью знака первой производной;

б) с помощью производных старших порядков.

19. Алгоритм нахождения точек экстремума. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, примеры задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.
20. Определение выпуклой (вогнутой) на отрезке функции. Связь выпуклости со знаком второй производной. Алгоритм нахождения точек перегиба.
21. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределах.
22. Понятие асимптоты графика функций, их виды и способы нахождения.
23. Общий план исследования функций и построения графика функции.

Интегрирование

24. Определение первообразной для *f(x)* на [a; b], теорема о двух первообразных. Неопределенный интеграл (НИ), его основные свойства. Таблица основных интегралов.
25. Определенный интеграл (ОИ) для *f(x),* как предел интегральных сумм, его основные свойства, теорема о среднем.
26. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной.
27. Формула Ньютона-Лейбница.
28. Замена переменной в НИ и ОИ.
29. Интегрирование по частям в НИ, ОИ, основные случаи.
30. Вычисление некоторых НИ методом неопределенных коэффициентов.
31. Дробно-рациональная функция, алгоритм ее разложения на сумму элементарных дробей:

а) выделение целой части, алгоритм "деления столбиком";

б) разложение многочлена на неприводимые множители, кратность корня;

в) метод неопределенных коэффициентов разложения на элементарные дроби.

32. Интегралы от элементарных дробей. Общий план интегрирования дробно-рациональных функций.
33. Интегралы от тригонометрических функций: перечислить основные случаи и способы интегрирования данных интегралов.
34. Интегралы от иррациональных функций. Примеры "неберущихся" интегралов.
35. Нахождение площади криволинейной трапеции и площадей плоских фигур с помощью ОИ (ограниченных $y_i=f_i(x)$; параметрически заданными).
36. Площадь криволинейного сектора. Нахождение площади фигуры в полярных координатах.
37. Объем тела по поперечным сечениям. Объем тела вращения с помощью ОИ.
38. Несобственный интеграл 1 рода, определение и критерии его сходимости.
39. Несобственный интеграл II рода, определение и критерии его сходимости.

5.3 Содержание 3 семестра

Числовые и функциональные ряды

1 Определение числового ряда, его частичных сумм и суммы, сходимости и расходимости. Сходимость геометрической прогрессии, ее сумма.

2 Признаки сходимости числового ряда: необходимый, сравнения и эквивалентности, интегральный и сходимость $\sum \frac{1}{n^p}$, Даламбера и Коши.

3 Знакопеременный и знакочередующийся ряды. Теорема Лейбница (признак Лейбница) о сходимости знакочередующегося ряда и оценке его суммы.

4 Функциональный ряд, определение его области сходимости. Степенной ряд. Теорема Абеля, интервал и радиус сходимости степенного ряда.

5 Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда, вычисление суммы степенного ряда сведением к геометрической прогрессии (или другому ряду).

6 Ряды Тейлора и Маклорена, их коэффициенты. Разложения в степенной ряд *sin(x), cos(x),* e^x *, ln(1+x)* и др. Оценка погрешности.

7 Приближенные вычисления чисел e и π, вычисления определенных интегралов с помощью степенных рядов.

Ряд и интеграл Фурье

8 Абстрактный ряд Фурье при заданном скалярном произведении функций, проверка системы функций на ортонормированность, коэффициенты ряда;

9 Проверка ортогональности тригонометрической системы функций на отрезке $[-\pi;\pi]$, нормы таких функций, коэффициенты ряда при скалярном произведении $f(x)\circ g(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\cdot g(x)\right)dx$. Тригонометрический ряд Фурье для заданной на $[-\pi;\pi]$ функции.

10 Кусочная непрерывность и кусочная монотонность функции. Теорема о разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi;\pi]$ и его сумме. Частичная сумма ряда Фурье как наложение гармоник.

11 Тригонометрическая система функций на $[-L;L]$, вид ряда Фурье по ним, его коэффициенты. Теорема о разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье на $[-L;L]$ и его сумме.

12 Разложение в ряд Фурье для чётных, нечётных и периодических функций. Периодическое продолжение заданной на отрезке функции на числовую прямую и ряд Фурье для нее. Ряд Фурье для функции, заданной на половине периода, её разложение по синусам и по косинусам.

13 Интеграл Фурье как предел для ряда Фурье при $L\to\infty$. Три различных способа записи интеграла Фурье. Тригонометрические и показательное преобразование Фурье и обратного преобразования Фурье.

Дифференциальное исчисление

Функции нескольких переменных

14. Область нескольких переменных, окрестность точки. Открытая и замкнутая области нескольких переменных. Функции нескольких переменных (ФНП): определение, способы задания. Геометрический смысл Z=f(x,y), линии уровня.

15. Предел ФНП в точке. Непрерывность ФНП в точке. Основные свойства

непрерывных ФНП.

16. Определение частной производной ФНП, правила их вычисления. Геометрический смысл частных производных для $Z=f(x, y)$. Уравнение касательной плоскости и нормали.
17. Полный дифференциал ФНП, связь с Δf, инвариантность его формы. Полная производная по переменной t. Производная неявной функции.
18. Производная по направлению. Градиент функции: определение, правила вычисления, связь с производной по направлению и с линией (поверхностью) уровня.
19. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных ФНП. Дифференциалы высших порядков для ФНП, их коэффициенты для $f(x, y)$ (Треугольник Паскаля и бином Ньютона). Формула Тейлора для ФНП. Приближенные вычисления.
20. Точки экстремума ФНП. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума в общем виде и для $f(x, y)$, характер экстремума.
21. Условный экстремум ФНП. Метод множителей Лагранжа и метод подстановки.
22. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой ограниченной области (план).
23. Метод наименьших квадратов (НК). Нахождение коэффициентов линейной, параболической функций и др. методом НК.
24. Постановка задачи математического программирования. Вид задачи линейного программирования (ЗЛП), выпуклость области её решений.
25. Графический метод решения ЗЛП.

Дифференциальные уравнения первого порядка

26. Общие понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ): ДУ, его решение, общее и частное решения, начальные и краевые условия, интегральная кривая, задача Коши. Теорема Коши для ДУ 1 порядка.
27. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными, их решения. Сведение текстовой задачи к решению ДУ на примере задачи о распаде радия и о непрерывном растворении соли (или другой задачи).
28. Однородные функции двух переменных. Общий вид и правило интегрирования однородных диф.уравнений. Уравнения, приводящиеся к однородным, их интегрирование.
29. Линейные ДУ первого порядка, методы Бернулли и вариации постоянной для их интегрирования.
30. Уравнение Бернулли, его интегрирование непосредственно и сведением к линейному ДУ.
31. Функции нескольких переменных: геометрический смысл $z=f(x; y)$, частные производные, полный дифференциал, градиент. Смешанные производные.
32. Уравнение в полных дифференциалах: общий вид, правило интегрирования и физический смысл.
33. Методы Эйлера и изоклин приближенного построения интегральных кривых.

Дифференциальные уравнения старших порядков

34. ДУ n-го порядка. Случаи ДУ, допускающих понижение порядка.
35. Линейное ДУ n-го порядка: общий вид, свойства решений, структура общего решения.
36. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского. Теорема о связи определителя Вронского с линейной зависимостью решений линейного однородного ДУ. Фундаментальная система решений и общее решение при этом.
37. Линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами: общий вид, метод Эйлера его решения, характеристическое уравнение. Общее решение линейного ДУ при известных корнях характеристического уравнения:

а) Корни действительные, различные,

б) Корни кратные, в) Корни комплексные, сопряженные.
38. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ при неоднородности специального вида (метод подбора):

а) $P_n(x)$, б) $P_n(x) \cdot e^{ax}$, в) $e^{ax} \cdot (A\cos(bx) + B\sin(bx))$, г) Сумма функций.

Нахождение коэффициентов предполагаемого решения.
39. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ методом вариации постоянных.
40. ДУ, описывающее механические колебания. Случаи свободных, затухающих, вынужденных колебаний. Случай резонанса.

Системы дифференциальных уравнений

41. Каноническая и нормальная формы системы ДУ. Решение системы ДУ, общее и частное решения. Начальные условия. Теорема о существовании и единственности решения системы ДУ.
42. Сведение ДУ к системе ДУ в нормальной форме, системы ДУ к одному дифференциальному уравнению (метод исключения).
43. Системы линейных уравнений, свойства решений однородных систем и неоднородных систем ДУ. Определитель Вронского системы ДУ, его свойства. ФСР системы ЛОДУ.
44. Нахождение решений линейной однородной системы методом исключения.
45. Нахождение решений линейной однородной системы с помощью собственных векторов.
46. Нахождение решений линейной неоднородной однородной системы методом вариации постоянных.

6 ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОДИН ВАРИАНТ)

6.1 ТР №1.1 Матрицы и решение линейных систем

1) Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найти: $(A-2B)+(B^T-C)$; $A\cdot(B\cdot C)$, A^{-1} и B^{-1} с проверкой результатов.

2) Вычислить определители матриц A, B, C, D

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 3\\ 3 & -2 & -2 & 4\\ 4 & -1 & 4 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

3) Решить систему уравнений

а) $\begin{cases}3x-5y=4\\ 7x+3y=24\end{cases}$; б) $\begin{cases}x-2y+z=-2\\ 2x+3y-3z=-2\\ -x+y-3z=-1\end{cases}$; в) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=0\\ x_1+x_2-3x_3+x_4=2\\ 2x_1+3x_2-2x_3-2x_4=10\end{cases}$.

6.2 ТР №1.2 Векторы

1) В базисе $(\bar{e}_1;\bar{e}_2)$ с модулями $|\bar{e}_1|$, $|\bar{e}_2|$ и углом между ними $(\bar{a}\wedge\bar{b})=\varphi$ заданы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=7$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=5\vec{e}_1+\vec{e}_2$

Найти $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$, $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

2) Для векторов $\vec{a}=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(-2;2;1)$, $\vec{c}=(2;-2;3)$ найти

а) $(\vec{a}-2\vec{b})+3(\vec{b}-2\vec{c})$; б) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$; в) $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{c}$;

г) Смешанное произведение; д) Разложение по ним вектора $\vec{d}=(1;2;1)$;
е) Углы между ними.

6.3 ТР №2.1 Прямая на плоскости

Записать все виды уравнений прямой (в плоскости xOy), проходящей по точкам A=(-2; 3) и B=(4; 1).
Найти расстояние до нее от точки C=(-2; -5), точку пересечения и угол с прямой y=2x+1. Найти центр тяжести и площадь треугольника ABC.

6.4 ТР №2.2 Линии и поверхности

1) В пирамиде ABCD с вершинами A=(1; 2; 3), B=(-1; 3; 2), C=(-4; 2; 5) и D=(3; 2; -1) найти угол между гранями ABC и ABD, длину высоты из D на ABC, площадь основания ABC и объём пирамиды.
2) Изобразить на плоскости XOY линию, заданную уравнением

а) $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$; б) $18x^2+108x+562-50y^2-100y=0$;

в) $6x+2y^2-12y+42=0$,

найти ее параметры *a,b,c,e,(p)*, координаты центра (вершины) и фокусов.
3) Изобразить поверхность, заданную уравнением $2x^2+4x-4y^2-12z^2=12$.

6.5 АКР №2 Графики функций

Построить графики функций

а) $y = 2x - 3$; б) $y = 2(x+1)^2 - 3$; в) $y = 3 - \dfrac{2}{x+1}$; г) $y=2sin(3x\text{-}2)+4$.

6.6 ТР №3.1 Пределы. Непрерывность

1) Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cdot tg^2(3x)}{arcsin(3x)\cdot cos(5x)}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + \sqrt[3]{x^7 + 5x - 1}}{2x - 3x^2 + 4x^3}\right)$;

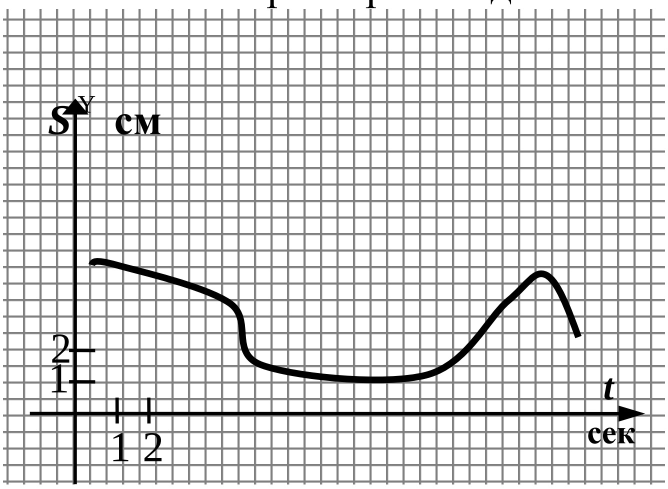
в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+7} - 3}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{5x-4}$.

2) Исследовать на разрывы функцию $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x \le \text{-}1 \\ 2x^2 - 4 & \text{при } \text{-}1 < x \le 1 \\ \dfrac{sin(x\text{-}1)}{3\text{-}3x} & \text{при } x > 1 \end{cases}$,

построить её график.

6.6 ТР №3.2 Производная функции одной переменной

№1 Зависимость от времени t (сек) расстояния S (см) от прямолинейно перемещающейся точки до начала координат задано графически. Из геометрического и физического смысла производной найти скорость точки через 2, 8, 10, 14 сек. от начала движения с указанием единиц измерения и расстояния до начала координат; Указать при этом знак второй производной



№2 Найти производные функций

1) $f(x) = 4sin^5(3x^2) - 2\cdot\sqrt[3]{tg(7x)} + \dfrac{5}{\arcsin(e^{-5x})}$;

2) $S(t) = \left(2t - 3\cos^3(t^4+1)\right)^{10}$;

3) $x(p)=\dfrac{p^2-3p}{3-2p}$ при p=0.

№3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$R(x)=2x^3-6x^2-18x+1$ при $x\in[-4;5]$.

№4 Провести полное исследование функции и построить её график

1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$; 2) $S(t)=(t-1)\cdot e^{-2t}$.

6.7 ТР №4 Интегрирование

1) Найти интегралы а) $\int\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(cos(2x)-3e^{-x}\right)dx$; б) $\int\dfrac{x^5-3x^2+1}{x^3-6x^2-7x}dx$;

в) $\int sin^3(2x)\cdot cos^5(2x)dx$; г) $\int\dfrac{\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt[3]{2x-1}}dx$;

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y=(x-1)^3$ и $y=x$-1; б) $\begin{cases}x=2\cos(t)\\ y=4\sin(t)\end{cases}$, $y\geq 2$; в) $\rho(\varphi)=cos(3\varphi)$;

3) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=0$ и x=2.

6.8 ТР №5.1 Числовые и функциональные ряды

1) Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{3x-2}{x^3+2x^2+x}dx$;

2) Исследовать числовой ряд на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать также абсолютную сходимость

2.а) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{8}{12}+\dfrac{11}{24}+\dfrac{14}{48}+\dfrac{17}{96}+\ldots$.; 2.б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2n^2-1}{n^3+2n}$; 2.3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{3^n}{n!}$.

3) Найти интервал и область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2}{n+1}\cdot(x+4)^n\ ;$$

4) Записать разложение функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки $x=x_o$ и найти область сходимости полученного ряда

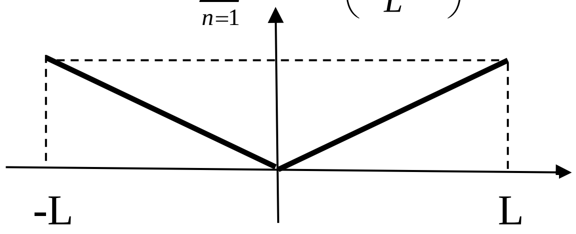
4.а) $f(x)=2e^{-2x}$, $x_0=0$; 4.б) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0=1$.

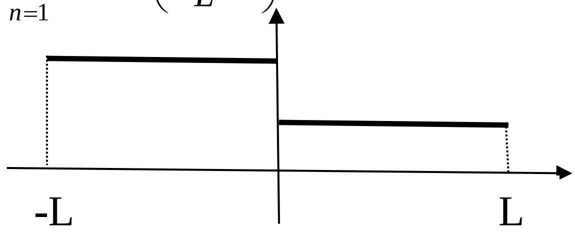
6.9 ТР №5.2 Ряд Фурье

№1 Для каждой заданной графически функции указать, какой из случаев является верным (с пояснением)

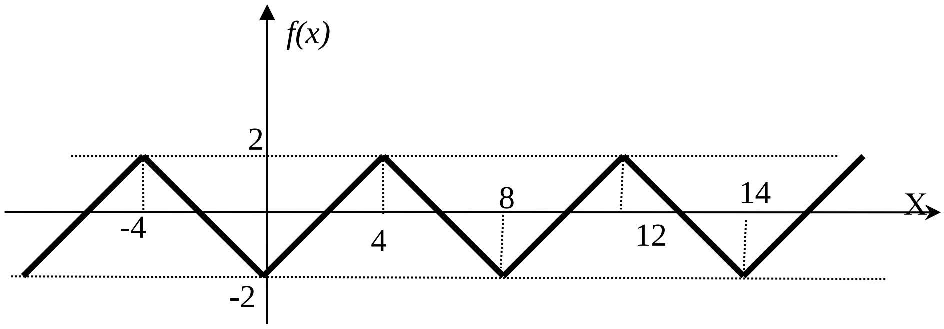
а) $f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot cos\left(\frac{n\cdot\pi}{L}x\right)+b_n\cdot sin\left(\frac{n\cdot\pi}{L}x\right)\right)$**;** **б)** $f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot sin\left(\frac{n\cdot\pi}{L}x\right)$**;**

в) $f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot cos\left(\frac{n\cdot\pi}{L}x\right)$**;** **г)** $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot sin\left(\frac{n\cdot\pi}{L}x\right)$





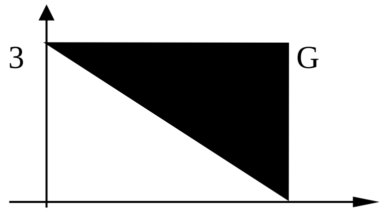
№2 Записать разложение в ряд Фурье функции, заданной графиком



6.10 ТР №6 Функции нескольких переменных

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x;y) = x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 3y$



а) в точках области G ;

б) при условиях $\begin{cases} x - y \ge -1 \\ y \ge x^2 + 1 \end{cases}$;

6.11 ТР №7.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Для каждого дифференциального уравнения

а) Определить его вид; б) Найти общее решение (общий интеграл);

в) При указанных начальных условиях решить задачу Коши

1) $x \cdot y'$-$2y = 1$, $y(1)=1$; 2) $(p^2+1) \cdot \sqrt{s} \cdot ds + p \cdot s \cdot dp = 0$;

3) $(x-y) \cdot dx + (2y-x) \cdot dy = 0$, $y=1$ при $x=1$;

6.12 ТР №7.2 Метод Эйлера решения линейных однородных ДУ

Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений и выделить частное решение, если указаны начальные условия

1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0;$

2) $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 6 \cdot \dfrac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0,$ $s(0) = 1,\ s'(0) = 0;$

3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

6.13 ТР №7.3 Линейные неоднородные диф. уравнения

При начальных условиях y(0)= y_o, $y'(0) = y'$ найти решение уравнения $A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = f(x)$

A=2, B= -1, C= -1, $f(x) = 10e^{2x} - 7\sin(x) - \cos(x) + 2x$, y_o=5, y'_o= 4,5.

6.14 АКР №7.4 Системы дифференциальных уравнений

Дана система дифференциальных уравнений

1) Методом исключения найти общее решение системы;
2) Записать общее решение системы в векторном виде;
3) Указать собственные числа и собственные векторы;
4) Изобразить эскиз интегральных кривых такой системы в окрестности точки покоя О(о; о) и исследовать такую точку на устойчивость;
5) Из общего решения системы выделить частное решение системы при указанных начальных условиях.

$$\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}, \quad x = 1 \quad y = -6 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

7 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ АТТЕСТАЦИИ ПО СЕМЕСТРОВЫМ ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В каждом семестре студент выполняет аудиторные и домашние контрольные работы (АКР и ТР), сроки их выполнения указаны в таблицах пунктов 4.1, 4.2, 4.3 и содержание указано в п. 6. Их выполнение позволяет набрать текущий рейтинг до 50 баллов, допуском к экзамену является 35 баллов. Экзаменационный билет содержит два теоретических и 3 задачи, каждое из этих пяти заданий оценивается по 10 баллов.

Пример билета экзаменационного билета за 1 семестр

1) Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц и свойства таких действий.

Задача: Вычислить $A\cdot(2B-C^T)$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

2) Парабола: определение, каноническое уравнение и уравнение со сдвигом вершины, свойства, построение.

Задача: Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой x=1 и точки F(-5; 2). Построить эту линию.

3) В пирамиде ABCD с вершинами A=(-4 ; 2 ; 6), B=(2;-3; 0), C=(-10; 5; 8), D=(-5; 2; -4) найти уравнение плоскости, проходящей через D параллельно плоскости ABC.

Оценка с учётом суммарно набранных баллов выставляется по таблице

Оценка по 5 бальной шкале	Зачет	Сумма баллов по дисциплине	Оценка (ECTS)	Градация
5 (отлично)	Зачтено	90-100	A	Отлично
4 (хорошо)		85-89	B	Очень хорошо
		75-84	C	Хорошо
		70-74	D	Удовлетворительно
3 (удовлетворительно)		65-69		
		60-64	E	Посредственно
2 (неудовлетворительно)	Не зачтено	Ниже 60	F	Неудовлетворительно

8 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

а) Основная литература:

1. **517 (075) Б 90 Бугров Я. С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : [учеб. пособие : в 3 т.] / Я. С. Бугров, С. М. Никольский ; под ред. В. А. Садовничего. - 6-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2004. - 288 с. : ил. - (Высшее образование, Современный учебник). - Предм. указ.: с. 282. - Рек. М-вом образования РФ для вузов. - ISBN 5-7107-8421-4 (т. 1) : 123-75. - ISBN 5-7107-8420-6.
   Кол-во экземпляров: всего – 25
2. **517(075) Б 50 Бермант А. Ф.** Краткий курс математического анализа : учеб. для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - 10-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар : Лань, 2003. - 736 с. - (Учебники для вузов, Специальная литература). - Библиогр.: с. 736. - ISBN 5-8114-0499-9 : 280-00.
   Кол-во экземпляров: всего – 30
3. **517(075) Д 17 Данко П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003. - 416 с. : ил. - С решениями. - ISBN 5-329-00528-0 : 72-00. - ISBN 5-94666-009-8 : 65-00. - ISBN 5-329-00327-X.
   Кол-во экземпляров: всего – 52
4. **517 Ш 63 Шипачев В. С.** Высшая математика : [учеб. пособие для вузов] / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2006. - 479 с. : ил. - Предм. указ.: с. 449-454. - Рек. М-вом образования РФ для вузов. - ISBN 5-06-003959-5 : 264-00.
   Кол-во экземпляров: всего - 15
5. **517 З-17 Зайцев И. А.** Высшая математика : [учеб. пособие] / И. А. Зайцев. - 4-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2005. - 398 с. : ил. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 392. - Рек. М-вом образования РФ для с.-х. вузов. - ISBN 5-7107-9071-0 : 146-85.
   Кол-во экземпляров: всего - **25**
6. **519(075) Г 55 Гмурман В. Е.**
   Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. - 9-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2003. - 479 с. - Предм. указ.: с. 474-479. - Рек. М-вом образования РФ для вузов. - ISBN 5-06-004214-6 : 109-00.
   Кол-во экземпляров: всего – 30

б) Дополнительная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1998 – 320 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах. Ч.1, 2. – М.: Высшая школа, 1986 – 304, 416 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов, т.1, 2. – Наука, 1978 – 560 с.
4. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998 – 479с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для экономических специальностей ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1986.
7. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис, 1998 – 288с.

в) Информационное обеспечение (электронные документы)

1. Орлов Ю.В. «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» учебное пособие

часть 1 «Матричное исчисление. Решение систем линейных уравнений» 64 с.

часть 2 «Векторное исчисление» 72 с. – Новоуральск, изд. НГТИ 2003.

2. Орлов Ю.В. Производная функции одной переменной Учебно – методическое пособие – Новоуральск, НПИ МИФИ 2001.
3. Орлов Ю.В. «Интегрирование». Учебно – справочное пособие по курсу «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» для студентов всех специальностей заочной формы обучения. Новоуральск, изд. НГТИ, 2007 − 32 с.
4. Орлов Ю.В. «РЯДЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» Учебно – справочное пособие по курсу «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» для студентов всех специальностей заочной формы обучения Новоуральск, изд. НГТИ. − 40 с.
5. Орлов Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно – методическое пособие по курсу «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» для студентов всех специальностей всех форм обучения. Новоуральск, изд. НГТИ, 2004.− 60 с.

9 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебная дисциплина обеспечена учебно-методической документацией и материалами. Её содержание представлено в локальной сети учебного заведения и находится в режиме свободного доступа для студентов. Доступ студентов для самостоятельной подготовки осуществляется через компьютеры дисплейного класса (в стандартной комплектации).

Приложение. Фонд оценочных средств.

2 Контрольная работа

Дз-1 Домашняя контрольная работа
Часть 1 по теме «Матрицы. Линейные системы. Векторы»
выдаётся на 2 неделе, сдача на 4 неделе 1-го семестра

(выполнить и сдать до 15 ноября)

№1.1 (3 балла) Для матриц A,B,C (см. таблицу) **найти** $2 \cdot A^T - B \cdot C$

№	A	B	C	№	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -10 & -4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

№	A	B	C
15	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 2 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 3 \\ 4 & 0 & -7 \\ 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 4 \\ 4 & 2 & -8 \\ 1 & 10 & 0 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 5 \\ 4 & 1 & -9 \\ 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 4 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 3 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 4 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 5 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 7 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
31	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
32	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
33	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
34	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 1 & 7 & -5 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 4 & 0 & -10 \\ 8 & 10 & -2 \end{pmatrix}$

№1.2 (5 баллов) Найти решение системы 1) Методом Крамера;

2) Матричным методом (проверив A^{-1} умножением на A);

3) Методом Гаусса или Жордана-Гаусса.

Вар.	Система	Вар.	Система
1	$\begin{cases} x+2y+3z=-9 \\ 4x+2z+5y=-3 \\ 3x-19-4y=3z \end{cases}$	10	$\begin{cases} x-2y+z\ =\ -1 \\ 2y+5z-2=-15-3x \\ -x+3y+z=-2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} -2x+2y+4z=-10 \\ 4x+2y+3z=\ 5 \\ 3z-2y+19=2x \end{cases}$	11	$\begin{cases} x+2y+3z=17 \\ 4x+2z+5y=21 \\ 3x-1-4y=3z \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x+2y+z\ =\ 5 \\ 4x+2z-8=\ 2y-8 \\ 2x+3y+3z=-2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} -2x+2y+4z=-10 \\ 4x+2y+3z=\ 5 \\ 3z-2y+19=2x \end{cases}$
4	$\begin{cases} 5x-y+4z=7 \\ 2y-2x+3x=3 \\ 4x-3y+z=10 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 3x+2y+z\ =\ 5 \\ 4x+2z-8=\ 2y-8 \\ 2x+3y+3z=-2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 5x+y+3z=10 \\ 2x-y-3z=4 \\ 4z-3y+x=-11 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 5x-y+4z=7 \\ 2y-2x+3x=3 \\ 4x-3y+z=10 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x-2y+z=-1 \\ 2y-x+3z-1=8 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 5x+y+3z=10 \\ 2x-y-3z=4 \\ 4z-3y+x=-11 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x-4y+2z=-7 \\ 2x-z+3y-2=-8 \\ -2x+y+2z=13 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 3x-2y+z=-1 \\ 2y-x+3z-1=8 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 4z+y-2x=1 \\ 3x-2y=-2Z+6 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 3x-4y+2z=-7 \\ 2x-z+3y-2=-8 \\ -2x+y+2z=13 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2y-3x+z=-5 \\ 4x+2y+5z=\ 5 \\ -x+3y=-z \end{cases}$	18	$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 4z+y-\ x=2 \\ 3x-2y=\ 6z \end{cases}$

Вар.	Система	Вар.	Система
19	$\begin{cases} 2y-3x+z=-5 \\ 4x+2y+5z=5 \\ -x+3y=-z \end{cases}$	27	$\begin{cases} 3x-4y+2z=-7 \\ 2x-z+3y-2=-8 \\ -2x+y+2z=13 \end{cases}$
20	$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2y+5z-2=-15-3x \\ -x+3y+z=-2 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x-2y+3z=15 \\ 4z+y-2x=6 \\ 3x-2y=-2z \end{cases}$
21	$\begin{cases} x+2y+3z=-9 \\ 4x+2z+5y=-3 \\ 3x-19-4y=3z \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2y-3x+z=-5 \\ 4x+2y+5z=5 \\ -x+3y=-z \end{cases}$
22	$\begin{cases} -2x+2y+4z=-10 \\ 4x+2y+3z=5 \\ 3z-2y+19=2x \end{cases}$	30	$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2y+5z-2=-15-3x \\ -x+3y+z=-2 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4x+2z-8=2y-8 \\ 2x+3y+3z=-2 \end{cases}$	31	$\begin{cases} x+2y+3z=-9 \\ 4x+2z+5y=-3 \\ 3x-19-4y=3z \end{cases}$
24	$\begin{cases} 5x-y+4z=7 \\ 2y-2x+3x=3 \\ 4x-3y+z=10 \end{cases}$	32	$\begin{cases} -2x+2y+4z=-10 \\ 4x+2y+3z=5 \\ 3z-2y+19=2x \end{cases}$
25	$\begin{cases} 5x+y+3z=10 \\ 2x-y-3z=4 \\ 4z-3y+x=-11 \end{cases}$	33	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4x+2z-8=2y-8 \\ 2x+3y+3z=-2 \end{cases}$
26	$\begin{cases} 3x-2y+z=-1 \\ 2y-x+3z-1=8 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases}$	34	$\begin{cases} 5x-y+4z=7 \\ 2y-2x+3x=3 \\ 4x-3y+z=10 \end{cases}$

№1.3 **(2 балла)** Система трех уравнений от четырех неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 в матричном виде имеет вид $A \cdot X = B$, матрицы A и B заданы в таблице. **Записать** эту систему, **найти** её общее решение и одно частное решение.

№	A	B
1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -9 \\ 5 & 4 & -6 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -13 \\ 5 & 4 & -6 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -25 \\ 35 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -23 \\ 35 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & 6 & -23 \\ 5 & 4 & -6 & 27 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & -7 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 19 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -17 \\ 5 & 4 & -6 & 21 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ -31 \\ 45 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -21 \\ 5 & 4 & -6 & 23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & -11 \\ 5 & 4 & -6 & 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -17 \\ 21 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & -15 \\ 5 & 4 & -6 & 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -19 \\ 29 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -5 \\ 5 & 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -17 \\ 29 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & -19 \\ 5 & 4 & -6 & 19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -9 \\ 5 & 4 & -6 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -13 \\ 5 & 4 & -6 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -23 \\ 31 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ -25 \\ 39 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & 6 & -23 \\ 5 & 4 & -6 & 27 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$

№	A	B	№	A	B
21	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & -7 \\ 5 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & -15 \\ 5 & 4 & -6 & 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ -17 \\ 25 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -5 \\ 5 & 4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -19 \\ 33 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -17 \\ 5 & 4 & -6 & 21 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 23 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & -19 \\ 5 & 4 & -6 & 19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ -29 \\ 41 \end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -9 \\ 5 & 4 & -6 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -21 \\ 5 & 4 & -6 & 23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & -11 \\ 5 & 4 & -6 & 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -13 \\ 5 & 4 & -6 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -25 \\ 35 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 25 \end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -13 \\ 5 & 4 & -6 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -25 \\ 35 \end{pmatrix}$

№1.4 **(3 балла)** В базисе $(\bar{e}_1;\bar{e}_2)$ с модулями векторов $|\bar{e}_1|$, $|\bar{e}_2|$ и углом φ между ними заданы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (см. таблицу).

Найти $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$, $\cos(\vec{a},\vec{b})$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$, $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

Вариант	Условия				
	$\lvert\bar{e}_1\rvert$	$\lvert\bar{e}_2\rvert$	φ	$\bar{a}$	$\bar{b}$
1	$\lvert\bar{e}_1\rvert=4$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=7$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=5\vec{e}_1+\vec{e}_2$
2	$\lvert\bar{e}_1\rvert=4$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=5$	$\varphi=60^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$	$\vec{b}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$
3	$\lvert\bar{e}_1\rvert=5$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=3$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$	$\vec{b}=4\vec{e}_1+6\vec{e}_2$
4	$\lvert\bar{e}_1\rvert=1$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=5$	$\varphi=90^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=4\vec{e}_1+\vec{e}_2$
5	$\lvert\bar{e}_1\rvert=3$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=5$	$\varphi=150^o$	$\vec{a}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$
6	$\lvert\bar{e}_1\rvert=2$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=5$	$\varphi=45^o$	$\vec{a}=5\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$
7	$\lvert\bar{e}_1\rvert=2$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=3$	$\varphi=90^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=5\vec{e}_1+2\vec{e}_2$
8	$\lvert\bar{e}_1\rvert=4$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=3$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$
9	$\lvert\bar{e}_1\rvert=4$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=7$	$\varphi=135^o$	$\vec{a}=\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$
10	$\lvert\bar{e}_1\rvert=4$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=1$	$\varphi=120^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$
11	$\lvert\bar{e}_1\rvert=5$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=2$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$
12	$\lvert\bar{e}_1\rvert=4$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=7$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=5\vec{e}_1+\vec{e}_2$
13	$\lvert\bar{e}_1\rvert=4$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=2$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$
14	$\lvert\bar{e}_1\rvert=3$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=5$	$\varphi=150^o$	$\vec{a}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2$
15	$\lvert\bar{e}_1\rvert=6$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=7$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$
16	$\lvert\bar{e}_1\rvert=4$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=3$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$	$\vec{b}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$
17	$\lvert\bar{e}_1\rvert=2$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=5$	$\varphi=90^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$
18	$\lvert\bar{e}_1\rvert=3$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=4$	$\varphi=150^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$
19	$\lvert\bar{e}_1\rvert=2$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=3$	$\varphi=60^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=5\vec{e}_1+2\vec{e}_2$
20	$\lvert\bar{e}_1\rvert=3$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=4$	$\varphi=150^o$	$\vec{a}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$	$\vec{b}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$
21	$\lvert\bar{e}_1\rvert=1$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=5$	$\varphi=120^o$	$\vec{a}=4\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$
22	$\lvert\bar{e}_1\rvert=3$	$\lvert\bar{e}_2\rvert=4$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1+4\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$

Вариант	$\lvert\bar{e}_1\rvert$	$\lvert\bar{e}_2\rvert$	φ	$\bar{a}$	$\bar{b}$
23	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=2$	$\varphi=60^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=2\vec{e}_1\ \vec{e}_2$
24	$\lvert\vec{e}_1\rvert=5$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=3$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$
25	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=3$	$\varphi=90^o$	$\vec{a}=4\vec{e}_1-2\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$
26	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=5$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$	$\vec{b}=5\vec{e}_1+\vec{e}_2$
27	$\lvert\vec{e}_1\rvert=3$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=2$	$\varphi=60^o$	$\vec{a}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$	$\vec{b}=4\vec{e}_1+5\vec{e}_2$
28	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=1$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$	$\vec{b}=4\vec{e}_1+3\vec{e}_2$
29	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=2$	$\varphi=45^o$	$\vec{a}=\vec{e}_1-5\vec{e}_2$	$\vec{b}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$
30	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=5$	$\varphi=60^o$	$\vec{a}=6\vec{e}_1+2\vec{e}_2$	$\vec{b}=4\vec{e}_1-3\vec{e}_2$
31	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=7$	$\varphi=150^o$	$\vec{a}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$	$\vec{b}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$
32	$\lvert\vec{e}_1\rvert=3$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=4$	$\varphi=60^o$	$\vec{a}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$	$\vec{b}=4\vec{e}_1+5\vec{e}_2$
33	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=5$	$\varphi=120^o$	$\vec{a}=4\vec{e}_1-2\vec{e}_2$	$\vec{b}=3\vec{e}_1+3\vec{e}_2$
34	$\lvert\vec{e}_1\rvert=4$	$\lvert\vec{e}_2\rvert=2$	$\varphi=30^o$	$\vec{a}=3\vec{e}_1-5\vec{e}_2$	$\vec{b}=4\vec{e}_1+\vec{e}_2$

№1.5 **(7 баллов)** Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (см. таблицу).

Найти для них

1) $(\vec{a} - 2\cdot\vec{b}) + 3\cdot(\vec{b} - 2\cdot\vec{c})$;
2) $(\vec{a} - 2\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c} - 3\cdot\vec{b})$;
3) Косинусы углов и углы между а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$, в) $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
4) $\vec{a}\times\vec{b}$;
5) Площадь треугольника построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
6) Смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$;
7) Объём пирамиды построенной на $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$;
8) Разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если они образуют базис.

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	$\vec{a}$ =(1;-5;-1)	$\vec{b}$ =(5;-4;2)	$\vec{c}$ =(2;3;4)	$\vec{d}$ =(3;18;23)
2	$\vec{a}$ =(1;-1;1)	$\vec{b}$ =(1;2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-2)	$\vec{d}$ =(1;0;5)
3	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;1;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-1)	$\vec{d}$ =(6;0;-1)
4	$\vec{a}$ =(1;1;-1)	$\vec{b}$ =(-1;3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-3)	$\vec{d}$ =(-12;-4;19)
5	$\vec{a}$ =(1;-3;-1)	$\vec{b}$ =(3;2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-2)	$\vec{d}$ =(11;-2;-1)
6	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;-2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;2)	$\vec{d}$ =(6;12;2)
7	$\vec{a}$ =(1;1;-1)	$\vec{b}$ =(-1;-1;2)	$\vec{c}$ =(2;3;1)	$\vec{d}$ =(0;0;-1)
8	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;5;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-5)	$\vec{d}$ =(6;12;23)
9	$\vec{a}$ =(1;3;-1)	$\vec{b}$ =(-3;-2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;2)	$\vec{d}$ =(1;-8;-3)
10	$\vec{a}$ =(1;-4;-1)	$\vec{b}$ =(4;3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-3)	$\vec{d}$ =(18;-4;-1)
11	$\vec{a}$ =(1;3;-1)	$\vec{b}$ =(-3;3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-3)	$\vec{d}$ =(-24;-18;27)
12	$\vec{a}$ =(1;1;-1)	$\vec{b}$ =(-1;4;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-4)	$\vec{d}$ =(15;0;29)
13	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;-3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;3)	$\vec{d}$ =(6;20;7)
14	$\vec{a}$ =(5;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;-3;0)	$\vec{c}$ =(1;3;3)	$\vec{d}$ =(2;-4;4)
15	$\vec{a}$ =(1;0;-1)	$\vec{b}$ =(0;-2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;2)	$\vec{d}$ =(4;10;0)
16	$\vec{a}$ =(1;-1;-1)	$\vec{b}$ =(1;2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-2)	$\vec{d}$ =(1;0;5)
17	$\vec{a}$ =(1;3;-1)	$\vec{b}$ =(-3;0;2)	$\vec{c}$ =(2;3;0)	$\vec{d}$ =(-9;-18;3)
18	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;0;2)	$\vec{c}$ =(2;3;0)	$\vec{d}$ =(6;2;-2)
19	$\vec{a}$ =(1;0;-1)	$\vec{b}$ =(0;3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-3)	$\vec{d}$ =(-6;0;15)
20	$\vec{a}$ =(1;-1;-1)	$\vec{b}$ =(1;-3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;3)	$\vec{d}$ =(6;20;5)
21	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;0;2)	$\vec{c}$ =(2;3;0)	$\vec{d}$ =(6;2;-2)

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
22	$\vec{a}$ =(1;3;-1)	$\vec{b}$ =(-3;2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-2)	$\vec{d}$ =(-19;-20; 17)
23	$\vec{a}$ =(1;2;-1)	$\vec{b}$ =(-2;4;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-4)	$\vec{d}$ =(-22;-6; 34)
24	$\vec{a}$ =(1;3;-1)	$\vec{b}$ =(-3;-3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;3)	$\vec{d}$ =(6;0;-3)
25	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;-4;2)	$\vec{c}$ =(2;3;4)	$\vec{d}$ =(6;30;14)
26	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;-4;2)	$\vec{c}$ =(2;3;4)	$\vec{d}$ =(6;30;14)
27	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-2)	$\vec{d}$ =(6;0;2)
28	$\vec{a}$ =(1;3;-1)	$\vec{b}$ =(-3;-3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;3)	$\vec{d}$ =(6;0;-3)
29	$\vec{a}$ =(1;0;-1)	$\vec{b}$ =(0;-5;2)	$\vec{c}$ =(2;3;5)	$\vec{d}$ =(10;40;15)
30	$\vec{a}$ =(1;-5;-1)	$\vec{b}$ =(5;-5;2)	$\vec{c}$ =(2;3;5)	$\vec{d}$ =(0;30;25)
31	$\vec{a}$ =(1;-5;-1)	$\vec{b}$ =(5;-4;2)	$\vec{c}$ =(2;3;4)	$\vec{d}$ =(3;18;23)
32	$\vec{a}$ =(1;-1;1)	$\vec{b}$ =(1;2;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-2)	$\vec{d}$ =(1;0;5)
33	$\vec{a}$ =(1;-2;-1)	$\vec{b}$ =(2;-1;2)	$\vec{c}$ =(2;3;1)	$\vec{d}$ =(6;6;-1)
34	$\vec{a}$ =(1;1;-1)	$\vec{b}$ =(-1;3;2)	$\vec{c}$ =(2;3;-3)	$\vec{d}$ =(-12;-4;19)

Часть 2 **по теме «Линии и поверхности»**
выдаётся на 9 неделе, сдача на 18 неделе 1-го семестра

№1.6 (5 баллов) Дана система трёх линейных неравенств с двумя переменными. Построить на плоскости xOy область, заданную системой неравенств. Для полученной области (треугольника) **найти**

1) Координаты всех вершин;
2) Один из внутренних углов;
3) Длину одного основания и высоты к такому основанию;
4) Площадь треугольника по основанию и высоте;
5) Площадь треугольника через векторное произведение;
6) Уравнения двух медиан;
7) Точку пересечения медиан (двумя способами).

Вариант			Вариант	
1	$\begin{cases} 26x-2y-69\le 0 \\ 2x+4y-24\le 0 \\ 14x+y-33\ge 0 \end{cases}$		2	$\begin{cases} 4x-28y+18\ge 0 \\ 10x+28y-102\le 0 \\ 6x+7y-22\ge 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x-2y+5\ge 0 \\ x+3y-10\le 0 \\ 2x+y-15\ge 0 \end{cases}$		4	$\begin{cases} 4x+4y-34\le 0 \\ 2x+20y-80\le 0 \\ 2x+11y-44\ge 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 22x-6y-17\le 0 \\ 6x-12y+42\le 0 \\ 12x-5y-11\ge 0 \end{cases}$		6	$\begin{cases} 18x-6y-63\le 0 \\ 10x+12y-58\le 0 \\ 8x+5y-28\ge 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 38x+2y-127\le 0 \\ -6x+4y-8\le 0 \\ 16+3y-47\ge 0 \end{cases}$		8	$\begin{cases} 6x-10y-1\le 0 \\ 2x+28y-110\le 0 \\ 4x+9y-32\ge 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 38x+10y-197\le 0 \\ x+6y-31\le 0 \\ 20x+11y-75\ge 0 \end{cases}$		10	$\begin{cases} 10x-14y-29\le 0 \\ 5x+10y-40\le 0 \\ 10x+3y-12\ge 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 26x-2y-69\le 0 \\ 2x+4y-24\le 0 \\ 14x+y-33\ge 0 \end{cases}$		12	$\begin{cases} 4x-28y+18\ge 0 \\ 10x+28y-102\le 0 \\ 6x+7y-22\ge 0 \end{cases}$

13	$\begin{cases} x-2y+5\geq 0 \\ x+3y-10\leq 0 \\ 2x+y-15\geq 0 \end{cases}$		14	$\begin{cases} 4x+4y-34\leq 0 \\ 2x+20y-80\leq 0 \\ 2x+11y-44\geq 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 22x-6y-17\leq 0 \\ 6x-12y+42\leq 0 \\ 12x-5y-11\geq 0 \end{cases}$		16	$\begin{cases} 18x-6y-63\leq 0 \\ 10x+12y-58\leq 0 \\ 8x+5y-28\geq 0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 38x+2y-127\leq 0 \\ -6+4y-8\leq 0 \\ 16+3y-47\geq 0 \end{cases}$		18	$\begin{cases} 6x-10y-1\leq 0 \\ 2x+28y-110\leq 0 \\ 4x+9y-32\geq 0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 38x+10y-197\leq 0 \\ x+6y-31\leq 0 \\ 20x+11y-75\geq 0 \end{cases}$		20	$\begin{cases} 10x-14y-29\leq 0 \\ 5x+10y-40\leq 0 \\ 10x+3y-12\geq 0 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 26x-2y-69\leq 0 \\ 2x+4y-24\leq 0 \\ 14x+y-33\geq 0 \end{cases}$		22	$\begin{cases} 4x-28y+18\geq 0 \\ 10x+28y-102\leq 0 \\ 6x+7y-22\geq 0 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x-2y+5\geq 0 \\ x+3y-10\leq 0 \\ 2x+y-15\geq 0 \end{cases}$		24	$\begin{cases} 4x+4y-34\leq 0 \\ 2x+20y-80\leq 0 \\ 2x+11y-44\geq 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} 22x-6y-17\leq 0 \\ 6x-12y+42\leq 0 \\ 12x-5y-11\geq 0 \end{cases}$		26	$\begin{cases} 18x-6y-63\leq 0 \\ 10x+12y-58\leq 0 \\ 8x+5y-28\geq 0 \end{cases}$

№1.7 (8 баллов) Даны четыре точки пространства:

$$A=(x_1;y_1;z_1),\ B=(x_2;y_2;z_2),\ C=(x_3;y_3;z_3),\ D=(x_4;y_4;z_4).$$

В пирамиде ABCD **найти**

1) Общее уравнение грани ABC;
2) Уравнение грани ABC в отрезках;
3) Уравнение плоскости, проходящей через D параллельно грани ABC;
4) Угол между рёбрами AB и BC;
5) Величину двугранного угла при ребре BC;
6) Угол между ребром AB и гранью BCD;
7) Каноническое и параметрическое уравнения ребра AB;
8) Длину ребра AB;
9) Длину высоты, опущенной из вершины D на плоскость ABC;
11) Площадь грани ABC;
12) Объём пирамиды по высоте и площади основания;
13) Объём пирамиды с помощью смешанного произведения;

(Вычисления производить с округлением до двух знаков после запятой, углы находить в градусах.)

№	**Точки**			
	A	**B**	**C**	**D**
1	A= (1 ; 3 ; 6)	B=(2; 2; 1)	C=(-1; 0; 1)	D=(-4; 6; -3)
2	A= (-4 ; 2 ; 6)	B=(2;-3; 0)	C=(-10; 5; 8)	D=(-5; 2; -4)
3	A= (7 ; 2 ; 4)	B=(7; -1; -2)	C=(3; 3;-1)	D=(-4; 2; 1)
4	A= (2 ; 1; 4)	B=(-1; 5; -2)	C=(-7;-3; 2)	D=(-6;-3; 6)
5	A= (-1 ;-5 ; 2)	B=(-6; 0;-3)	C=(3; 6;-3)	D=(-10;6; 7)
6	A= (0;-1 ;-1)	B=(-2; 3; 5)	C=(1;-5;-9)	D=(-1;-6; 3)
7	A= (5 ; 2 ; 0)	B=(2; 5; 0)	C=(1; 2; 4)	D=(-1; 1; 1)
8	A= (2 ;-1 ;-2)	B=(1; 2; 1)	C=(5; 0;-6)	D=(-10; 9;-7)
9	A= (-2; 0 ;-4)	B=(-1; 7; 1)	C=(4;-8;-4)	D=(1; -4; 6)
10	A= (14; 4 ; 5)	B=(-5;-3; 2)	C=(-2;-6;-3)	D=(-2; 2; -1)
11	A= (1 ; 2 ; 0)	B=(3; 0; -3)	C=(5; 2; 6)	D=(8; 4;-9)
12	A= (2 ;-1 ; 2)	B=(1; 2; -1)	C=(3; 2; 1)	D=(-4; 2; 5)

13	A= (1 ; 1 ; 2)	B=(-1; 1; 3)	C=(2;-2; 4)	D=(-1; 0;-2)
14	A= (2; 3 ; 1)	B=(4; 1;-2)	C=(6; 3; 7)	D=(7; 5;-3)
15	A= (1 ; 1 ; -1)	B=(2; 3; 1)	C=(3; 2; 1)	D=(5; 9; -8)
16	A= (1 ; 5 ; -7)	B=(-3; 6; 3)	C=(-2; 7;3)	D=(-4; 8; -12)
17	A= (-3; 4;-7)	B=(1; 5;-4)	C=(-5; -2; 0)	D=(2; 5; 4)
18	A= (-1 ; 2 ;-3)	B=(4 ;-1; 0)	C=(2; 1;-2)	D=(3; 4; 5)
19	A= (4; -1; 3)	B=(-2; 1; 0)	C=(0;-5; 1)	D=(3; 2; -6)
20	A= (1 ;-1 ; 1)	B=(-2; 0 ; 3)	C=(2; 1;-1)	D=(2; -2; -4)
21	A= (1 ; 2 ; 0)	B=(1;-1; 2)	C=(0; 1;-1)	D=(-3; 0; 1)
22	A= (1 ; 0; 2)	B=(1; 2; -1)	C=(2; -2; 1)	D=(2; 1; 0)
23	A= (1 ; 2 ;-3)	B=(1; 0; 1)	C=(-2; -1; 6)	D=(0;-5; -4)
24	A= (3 ;10 ;-1)	B=(-2; 3;-5)	C=(-6; 0;-3)	D=(1;-1; 2)
25	A= (-1 ; 2 ; 4)	B=(-1;-2; -4)	C=(3; 0;-1)	D=(7; -3; 1)
26	A= (0 ;-3 ; 1)	B=(-4; 1; 2)	C=(2;-1; 5)	D=(3; 1;-4)
27	A= (1 ; 3 ; 0)	B=(4;-1; 2)	C=(3; 0; 1)	D=(-4; 3; 5)
28	A= (-2; -1 ; -1)	B=(0; 3; 2)	C=(3; 1;-4)	D=(-4; 7; 3)
29	A= (-3 ;-5 ; 6)	B=(2; 1; -4)	C=(0; -3;-1)	D=(-5; 2; -8)
30	A= (2 ;-4 ;-3)	B=(5;-6; 0)	C=(-1; 3;-3)	D=(-10;-8; 7)
31	A= (1 ;-1 ; 2)	B=(2; 1; 2)	C=(1; 1; 4)	D=(6; -3; 8)
32	A= (2 ; 1 ;-1)	B=(1;-3; 2)	C=(1; 6; 3)	D=(1 ; 0;-1)
33	A= (1 ; 2 ; 3)	B=(-2; 1; 0)	C=(5; 2;-1)	D=(-2; 4; 4)
34	A= (1 ; 0 ; 3)	B=(-2; 1; 3)	C=(-2; 2;-1)	D=(0 ; 4; 4)

№1.8 (3 балла) Изобразить кривую, заданную уравнением. **Определить** для кривой полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет, координаты центра и фокусов

1	$\frac{1}{9}\cdot x^2-\frac{1}{9}\cdot(y-2)^2=1$	18	$\frac{-1}{4}\cdot(x+3)^2+\frac{1}{9}\cdot(y+1)^2=1$
2	$\frac{1}{16}\cdot(x-1)^2-\frac{1}{16}\cdot(y-2)^2=1$	19	$\frac{-1}{16}\cdot(x+1)^2+\frac{1}{16}\cdot(y-2)^2=1$
3	$\frac{1}{9}\cdot(x+4)^2+\frac{1}{25}\cdot(-y+2)^2=1$	20	$\frac{-1}{16}\cdot(-x+1)^2+\frac{1}{36}\cdot(y-2)^2=1$
4	$\frac{1}{25}\cdot(x+1)^2+\frac{1}{49}\cdot(-y-1)^2=1$	21	$\frac{-1}{16}\cdot x^2+\frac{1}{49}\cdot(y-2)^2=-1$
5	$\frac{1}{25}\cdot(-x-3)^2-\frac{1}{64}\cdot(y+1)^2=1$	22	$\frac{-1}{25}\cdot(x+1)^2+\frac{1}{64}\cdot(y+1)^2=-1$
6	$\frac{1}{4}\cdot(x+3)^2+\frac{1}{4}\cdot(-y-1)^2=1$	23	$\frac{-1}{36}\cdot(x+4)^2+\frac{1}{4}\cdot(y+1)^2=-1$
7	$\frac{1}{25}\cdot(x+2)^2-\frac{1}{9}\cdot(-y+2)^2=1$	24	$\frac{-1}{4}\cdot(x+3)^2+\frac{1}{16}\cdot(y+1)^2=-1$
8	$\frac{1}{16}\cdot(x-1)^2-\frac{1}{25}\cdot(y-2)^2=1$	25	$\frac{-1}{36}\cdot(x+3)^2+\frac{1}{25}\cdot(y-2)^2=-1$
9	$\frac{1}{25}\cdot(x+1)^2-\frac{1}{36}\cdot(y-2)^2=1$	26	$\frac{-1}{16}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{36}\cdot(y-2)^2=-1$
10	$\frac{-1}{25}\cdot(x+1)^2+\frac{1}{49}\cdot(y+1)^2=1$	27	$\frac{-1}{36}\cdot(x+2)^2+\frac{1}{49}\cdot(y-2)^2=-1$
11	$\frac{-1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{64}\cdot(y+1)^2=1$	28	$\frac{-1}{25}\cdot(x+1)^2+\frac{1}{4}\cdot(y+1)^2=-1$
12	$\frac{-1}{4}\cdot(x+3)^2+\frac{1}{9}\cdot(y+1)^2=1$	29	$\frac{-1}{9}\cdot(x+1)^2+\frac{1}{9}\cdot(y+1)^2=-1$
13	$\frac{1}{4}\cdot(-x-4)^2+\frac{1}{16}\cdot(y-2)^2=1$	30	$\frac{-1}{4}\cdot(x+3)^2+\frac{1}{16}\cdot(y+1)^2=-1$
14	$\frac{1}{16}\cdot(-x+1)^2+\frac{1}{25}\cdot(y-2)^2=1$	31	$\frac{1}{9}\cdot x^2-\frac{1}{25}\cdot(y-2)^2=-1$
15	$\frac{-1}{4}\cdot(x+3)^2+\frac{1}{36}\cdot(y-2)^2=1$	32	$\frac{1}{16}\cdot(x-1)^2-\frac{1}{49}\cdot(y-2)^2=-1$
16	$\frac{1}{25}\cdot(-x-1)^2+\frac{1}{64}\cdot(y+1)^2=1$	33	$\frac{1}{9}\cdot(x+4)^2-\frac{1}{64}\cdot(y-2)^2=-1$
17	$\frac{1}{16}\cdot(-x-2)^2+\frac{1}{4}\cdot(y+1)^2=1$	34	$\frac{1}{25}\cdot(x+1)^2-\frac{1}{4}\cdot(y+1)^2=-1$

№1.9 **(4 балла)** **Привести** уравнение кривой к каноническому виду.
Построить линию, заданную уравнением

1) $-98 - 8\cdot x^2 + 16\cdot x - 18\cdot y^2 + 108\cdot y = 0$	2) $-168 - 8\cdot x^2 + 16\cdot x - 32\cdot y^2 + 192\cdot y = 0$
3) $12 - 4\cdot x^2 + 24\cdot x - 16\cdot y^2 - 32\cdot y = 0$	4) $-99 - 12\cdot x^2 + 72\cdot x - 3\cdot y^2 - 6\cdot y = 0$
5) $147 + 3\cdot x^2 + 42\cdot x + 3\cdot y^2 + 18\cdot y = 0$	6) $3\cdot x^2 - 18\cdot x - 18 + 3\cdot y^2 + 6\cdot y = 0$
7) $25\cdot x^2 - 200\cdot x + 316 + 4\cdot y^2 - 16\cdot y = 0$	8) $16\cdot x^2 + 96\cdot x - 156 + 100\cdot y^2 + 200\cdot y = 0$
9) $32\cdot x^2 + 512\cdot x + 2642 + 18\cdot y^2 - 252\cdot y = 0$	10) $36\cdot x^2 + 288\cdot x + 301 + 25\cdot y^2 + 250\cdot y = 0$
11) $4\cdot x^2 - 24\cdot x + 161 + 25\cdot y^2 - 150\cdot y = 0$	12) $16\cdot x^2 + 96\cdot x - 396 + 36\cdot y^2 + 72\cdot y = 0$
13) $4\cdot x^2 + 9\cdot y^2 + 18\cdot y - 27 = 0$	14) $36\cdot x^2 + 360\cdot x + 900 + 25\cdot y^2 - 300\cdot y = 0$
15) $97 + 16\cdot x^2 - 32\cdot x + 9\cdot y^2 - 90\cdot y = 0$	16) $64 + 36\cdot x^2 - 288\cdot x + 16\cdot y^2 + 64\cdot y = 0$
17) $401 + 25\cdot x^2 - 150\cdot x + 16\cdot y^2 + 192\cdot y = 0$	18) $-192 - 3\cdot x^2 - 48\cdot x - 3\cdot y^2 - 18\cdot y = 0$
19) $12\cdot x^2 - 72\cdot x + 63 + 3\cdot y^2 + 6\cdot y = 0$	20) $25\cdot x^2 - 150\cdot x + 129 + 4\cdot y^2 - 8\cdot y = 0$
21) $16\cdot x^2 + 96\cdot x - 288 + 144\cdot y^2 + 288\cdot y = 0$	22) $32\cdot x^2 + 512\cdot x + 1778 + 18\cdot y^2 + 36\cdot y = 0$
23) $36\cdot x^2 + 360\cdot x + 225 + 25\cdot y^2 + 150\cdot y = 0$	24) $96 + 4\cdot x^2 - 48\cdot x + 16\cdot y^2 + 32\cdot y = 0$
25) $144 + 4\cdot x^2 - 24\cdot x + 9\cdot y^2 - 72\cdot y = 0$	26) $360 + 8\cdot x^2 + 80\cdot x + 32\cdot y^2 - 192\cdot y = 0$
27) $352 + 4\cdot x^2 + 16\cdot x + 16\cdot y^2 - 160\cdot y = 0$	28) $-54 + 3\cdot x^2 - 18\cdot x + 27\cdot y^2 + 54\cdot y = 0$
29) $8\cdot x^2 - 48\cdot x + 42 + 2\cdot y^2 + 4\cdot y = 0$	30) $4\cdot x^2 - 40\cdot x + 25 + 25\cdot y^2 - 50\cdot y = 0$
31) $16\cdot x^2 - 160\cdot x - 140 + 36\cdot y^2 + 72\cdot y = 0$	32) $4\cdot x^2 + 56\cdot x + 169 + 9\cdot y^2 + 18\cdot y = 0$
33) $36\cdot x^2 + 360\cdot x + 225 + 25\cdot y^2 + 150\cdot y = 0$	34) $435 + 48\cdot x^2 - 192\cdot x + 27\cdot y^2 - 270\cdot y = 0$
35) $388 + 36\cdot x^2 - 360\cdot x + 16\cdot y^2 + 64\cdot y = 0$	36) $576 + 25\cdot x^2 + 200\cdot x + 16\cdot y^2 + 192\cdot y = 0$

2.3 Правила оформления домашней работы

В первом семестре, как и в следующих, студент должен выполнить по две части контрольной работы по пройденным темам. Первую часть по теме «Матрицы. Линейные системы. Векторы» следует выполнить и сдать до 15 ноября.

Задание выполняется на печатных листах формата А4. На титульном листе указывается указание ВУЗа (достаточно НТИ НИЯУ МИФИ), кафедры, предмета, названия выполняемой работы с номером варианта, ФИО выполнившего с указанием его группы, ФИО проверяющего, город и год выполнения.

На следующей странице – содержание работы с указанием номеров страниц (все листы должны быть пронумерованы и скреплены).

По списку группы студент получает свой вариант (порядковый номер), по которому в каждом из типовых заданий выбирает свой подпункт и соответствующее индивидуальное задание. Номер в этом списке останется неизменным до конца семестра даже при изменении списка группы.

Далее приводится решение заданий: в них должно быть приведена полная формулировка каждого задания с указанием индивидуальной части, после которого слово «Решение» с приведением метода решения с промежуточными значениями, в завершении задания должен быть выделен ответ на задание. На последней странице указывается список применяемой литературы.

Образец оформления титульного листа

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

НОВОУРАЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра высшей математики

Контрольная работа №1

по дисциплине «Математика»
по теме «Матрицы. Линейные системы. Векторы»

Вариант № 13

Выполнил:
студент гр. АБ-14з
Матрицын А.В

Проверил: Иванов И.И.

Новоуральск 2014

3 Методика оценки достижений

3.1 Для оценки достижений студента используется *балльно-рейтинговая система*:

- В *каждом семестре* студент должен выполнить домашнюю контрольную работу из двух частей. После её проверки студент получает баллы (рейтинг)

Код	**Вид оценочного средства**	**Максимальный балл**	**Зачтённая работа, баллы**	**Незачёт, баллы**
Дз-1 Часть 1	Домашняя контрольная работа (ДКР)	20	11– 20	0 – 10
Дз-1 Часть 2	ДКР	20	11– 20	0 – 10
Э-1	Экзамен	60	26 – 60	0 – 25

- Допуском до зачёта является набранные за семестр 25 баллов при зачтённой *каждой части* контрольной работы. При недопуске студент исправляет ошибки в своей работе либо выполняет дополнительные задания для набора не менее 25 баллов;
- На зачёте в каждом билете имеется по 6 практических задач, каждая оценивается по 10 баллов, на их выполнение даётся 2 часа. Допускается использование дополнительной литературы;
- При наборе на зачёте менее 26 баллов зачёт является несданным и выставляется неудовлетворительная оценка (независимо от набранных в семестре баллов);
- Оценкой за семестр является общий суммарный рейтинг в виде суммы баллов, накопленных за семестр, и полученных на экзамене. Оценка выставляется при наборе не менее 60 баллов с указанием этой суммы и соответствующей оценки.

Оценка по 5 бальной шкале	**Зачет**	**Сумма баллов по дисциплине**	**Оценка (ECTS)**	**Градация**
5 (отлично)	Зачтено	90-100	**A**	Отлично
4 (хорошо)		85-89	**B**	Очень хорошо
		75-84	**C**	Хорошо
		70-74	**D**	Удовлетворительно
3 (удовлетворительно)		65-69		
		60-64	**E**	Посредственно
2 (неудовлетворительно)	Не зачтено	Ниже 60	**F**	Неудовлетворительно

3.2 Вопросы зачёта

1. Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц.
2. Определители второго и третьего порядка: определение, правило вычисления и основные свойства. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента, раскрытие определителя по строке или столбцу.
3. Общее определение определителя n-го порядка. Задача о расстановке ладей на шахматной доске. Вычисление определителя четвертого порядка.
4. Обратная матрица: определение, теорема о существовании обратной матрицы (способ нахождения A^{-1}), проверка полученного результата.
5. Система линейных уравнений, определение ее решения. Метод Крамера нахождения решений линейной системы. Теорема Крамера. Матричная запись линейной системы. Матричный метод нахождения решения линейной системы.
6. Метод Гаусса и Жордана-Гаусса решения линейной системы. Случаи единственного решения, множества решений и отсутствия решений.
7. Однородная линейная система, существование ее нетривиального решения, базисные и свободные переменные при этом.

8. Скалярные и векторные величины. Способы задания векторов. Действия над векторами (графически): сравнение, умножение на число, сумма и разность. Основные свойства действий над векторами.
9. Линейная зависимость системы векторов. Размерность векторного пространства (прямой, плоскости, пространства). Афинный базис, афинные координаты вектора, нахождение их геометрически.
10. Скалярное произведение векторов: определение, основные свойства. Косинус угла между векторами. Модуль вектора. Проекции вектора на ось.
11. Декартова система координат, базисные векторы. Декартовы координаты вектора, запись вектора через базисные. Связь точек и векторов. Сравнение, умножение на число, сумма, разность векторов в координатной форме.
12. Скалярное произведение векторов в декартовых координатах. Модуль вектора, расстояние между точками и угол между векторами в координатной форме.
13. Правая тройка векторов. Векторное произведение: определение и основные свойства, геометрический смысл, синус угла между векторами.
14. Векторное произведение двух векторов в координатной форме. Площадь треугольника, заданного координатами вершин с помощью векторного произведения.
15. Смешанное произведение: определение, основные свойства и правило вычисления в координатной форме, геометрический смысл, проверка линейной зависимости.

16. Способы задания линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве по Декарту и Жордану. Полярная система координат.

17. Уравнения прямой на плоскости: векторное, параметрическое, через две точки, каноническое, с угловым коэффициентом, общее, в отрезках и нормальное. Связь направляющего и нормального векторов прямой.
18. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (по уравнениям), параллельность, перпендикулярность, точка пересечения. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Проекция точки на прямую.
19. Уравнения плоскости в пространстве: векторное, параметрическое, через три точки (точку и два направляющих вектора), общее в отрезках и нормальное.
20. Связь нормального и направляющих векторов плоскости. Взаимное расположение плоскостей (параллельность, совпадение, пересечение, перпендикулярность) по уравнениям. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.
21. Уравнения прямой в пространстве: векторное, параметрическое, по двум точкам, каноническое, общее, через проектирующие плоскости.
22. Взаимное расположение прямой и плоскости: параллельность, пересечение, перпендикулярность, проекция точки на плоскость, симметрия точки относительно плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

23. Взаимное расположение двух прямых в пространстве по уравнениям: пересечение (точка пересечения), параллельность (расстояние), скрещивание (наименьшее расстояние).
24. Эллипс: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
25. Гипербола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
26. Парабола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
27. Общее уравнение линии второго порядка, приведение к каноническому уравнению по общему (при отсутствии $x \cdot y$) выделением полных квадратов.
28. Директориальное свойство эллипса и гиперболы, правило нахождения их канонического уравнения.
29. Нахождение уравнения окружности по трем точкам.
30. Классификация линий второго порядка на плоскости. Цилиндрические и конические сечения.
31. Канонические уравнения и эскизы поверхностей второго порядка: эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов.
32. Линейчатые поверхности (гиперболоид и параболоид). Цилиндрические и конические поверхности. Классификация поверхностей второго порядка.
33. Основы модели Леонтьева межотраслевого баланса: матрица коэффициентов прямых затрат, МОБ в количественном и стоимостном выражении, нахождение валового продукта при заданном чистом продукте.

3.3 ПРИМЕР зачётного задания

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Новоуральский технологический институт
Кафедра высшей математики

Направление подготовки – 38.03.02 «Менеджмент»
Профиль – «Менеджмент» (**МН-14з**)
Квалификация (степень) выпускника – академический бакалавр
Форма обучения – Заочная
Дисциплина – **МАТЕМАТИКА, 1 СЕМЕСТР**

Зачётное задание. Вариант №1

1) Вычислить $A\cdot(2B-C^{T})$, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&4\\1&-2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&3&2\\-1&2&0\\3&2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&1&2\\-1&2&-3\end{pmatrix}.$$

2) Найти решение системы $\begin{cases}2x+y+3z=6\\3x-y-2z=5\\x+2z+y=3\end{cases}$ двумя способами

3) Даны векторы $\vec{a}=(1;-5;-1)$, $\vec{b}=(5;-4;\ 2)$, $\vec{c}=(2;\ 3;\ 4)$.

Найти $(3\vec{a}-2\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}-3\cdot\vec{b})$

4) Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой $x=1$ и точки F(-5;1). Построить эту линию.

5) В пирамиде ABCD с вершинами A=(-4 ; 2 ; 6), B=(2;-3; 0), C=(-10; 5; 8), D=(-5; 2; -4) найти уравнение плоскости, проходящей через D параллельно плоскости ABC.

6) Изобразить линию, заданную уравнением $98+8x^2-16x+18y^2-108y=0$.

Составил: ______________________________ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: _______________________________Носырев Н.А.

05.01.2015
Новоуральск

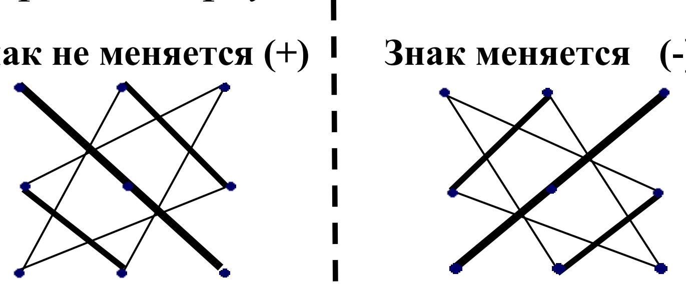
4 Справочник

- Равенство матриц $A_{m\times n} = B_{k\times p} \Leftrightarrow \begin{cases} m=k, n=p, \\ a_{ij}=b_{ij} \text{ при } 1\le i\le m, 1\le j\le n \end{cases}$;
- Транспонирование матрицы $\left(\| a_{i,j} \|\right)^T = \| a_{i,j} \|$;
- Сумма матриц $A_{m\times n} + B_{m\times n} = \left\| a_{ij} + b_{ij} \right\|$;
- Умножение матрицы на число $\alpha \cdot A = \left\| \alpha \cdot a_{ij} \right\|$;
- Произведение матриц $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$, $c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}$;
- Единичная матрица $E_{nxn} = \| e_{ij} \|$, $e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i=j \\ 0 \text{ при } i\ne j \end{cases}$ $1\le i\le n,\ 1\le j\le n$;
- Определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$;
- Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - \\ - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}. \end{matrix};$$

- *Правило треугольников*

Знак не меняется (+) **Знак меняется (-)**



- Алгебраическое дополнение элемента $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$;
- Раскрытие определителя по i-й строке

$$|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik},$$

- Раскрытие определителя по j-му столбцу

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj};$$

- $i \neq t \Rightarrow \quad a_{i1} \cdot A_{t1} + a_{i2} \cdot A_{t2} + ... + a_{in} \cdot A_{tn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{tj} = 0;$

- Факториал числа $\quad$ **n! =** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1), \;\; 0! = 1;$

- Обратная для А матрица $\quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E;$

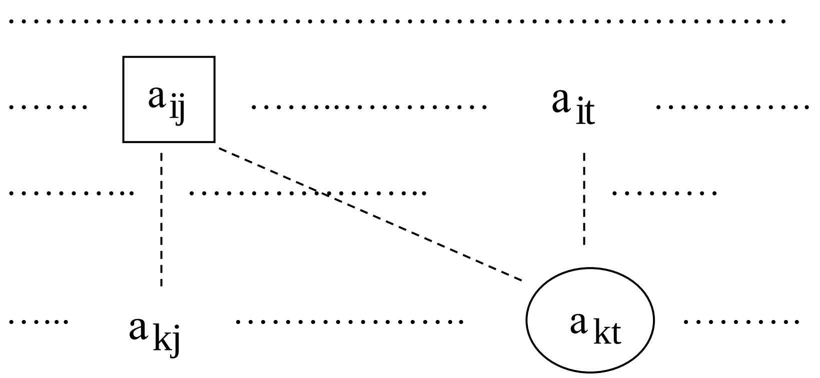
- Нахождение обратной матрицы $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \| A_{ij} \|^{T};$

- Матричная запись линейной системы $A \cdot X = B;$

- Метод Крамера $\quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad 1 \leq i \leq n;$

- Матричный метод решения линейной системы $\quad X = A^{-1} \cdot B;$

- Пересчет элемента a_{kt} расширенной матрицы системы при разрешающем элементе a_{ij}



$$\boxed{a'_{kt} = a_{kt} - \frac{a_{it} \cdot a_{kj}}{a_{ij}}}$$

- Скалярное произведение векторов $\quad \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\varphi);$

- Проекция вектора на ось $\text{пр}_l \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge l)$;

- Декартов базис, если $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}$;

- Если даны векторы $\bar{a} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $\bar{b} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$, то для них:

1) равенство $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow (x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n)$;

2) сумма $\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;

3) умножение на число $\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda \cdot x_1; \lambda \cdot x_2; \ldots; \lambda \cdot x_n)$;

4) скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$;

5) модули $|\bar{a}| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2}$ $|\bar{b}| = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + \ldots + (y_n)^2}$;

6) ортогональность: Если $\bar{a} \neq 0$ $\bar{b} \neq 0$ и $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ то $\bar{a} \perp \bar{b}$;

7) косинус угла $\cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \dfrac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + \ldots + (y_n)^2}}$;

8) $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{y_n} \Rightarrow$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

- Для точек $A = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $B = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$

1) вектор $\overline{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; \ldots; y_n - x_n)$

2) расстояние $|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$

3) середина $x_1^0 = \dfrac{x_1 + y_1}{2}$, $x_2^0 = \dfrac{x_2 + y_2}{2}$, …, $x_n^0 = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

- Модуль векторного произведения $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a} \wedge \bar{b})$;

- Векторное произведение *базисных векторов* декартова базиса $(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0 \qquad \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} \qquad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$$
$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k} \qquad \bar{j} \times \bar{j} = 0 \qquad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$$
$$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} \qquad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i} \qquad \bar{k} \times \bar{k} = 0;$$

- Площадь треугольника ABC $S_{ABC} = \dfrac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2} = \dfrac{|\overline{BA} \times \overline{BC}|}{2} = \dfrac{|\overline{CA} \times \overline{CB}|}{2}$;

- Векторное произведение в координатной форме

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix};$$

- $\sin(\bar{a}\wedge\bar{b})=\dfrac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\dfrac{\sqrt{(y_1\cdot z_2-z_1\cdot y_2)^2+(x_1\cdot z_2-z_1\cdot x_2)^2+(x_1\cdot y_2-y_1\cdot x_2)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2{}^2}}$;
- Двойное векторное произведение $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{b}\cdot(\bar{a}\cdot\bar{c})-\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})$;
- Смешанное произведение $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$;
- $V_{пар-да}=|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}|\quad V_{пир.}=\dfrac{|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}|}{6}$;
- Декартовы координаты по полярным $\begin{cases} x=r\cdot\cos(\varphi) \\ y=r\cdot\sin(\varphi) \end{cases}$;
- Полярные координаты по декартовым $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\begin{cases} \cos(\varphi)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(\varphi)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$;
- Уравнения прямой на плоскости:

1) Общее $A\cdot x+B\cdot y+C=0$;
2) По двум точкам $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0$;
3) Каноническое $\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$;
4) С угловым коэффициентом $y=k\cdot x+b$, $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$;
5) В отрезках $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$;
6) Нормальное $\cos(\varphi_1)\cdot x+\cos(\varphi_2)\cdot y=p$,

где $\cos(\varphi_1)=\pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos(\varphi_2)=\pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $p=\mp\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

7) Параметрическое $\begin{cases} x(t)=x_0+\alpha\cdot t \\ y(t)=y_0+\beta\cdot t \end{cases}$, t – параметр.

Во всех уравнениях $M(x; y)$, $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ – точки прямой,
$\bar{n}=(A; B)$ - нормальный вектор,
$\bar{e}=(\alpha; \beta)$ - направляющий вектор, $\bar{n}\cdot\bar{e}=0$.

- Пересечение прямых – решение системы $\begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1=0 \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2=0 \end{cases}$;

- Угол между прямыми из условия $\cos(\varphi)=\dfrac{|A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2|}{\sqrt{(A_1)^2+(B_1)^2}\cdot\sqrt{(A_2)^2+(B_2)^2}}$;

- Расстояние от точки до прямой $d=\dfrac{|A\cdot x+B\cdot y+C|}{\sqrt{(A_1)^2+(B_1)^2}}$;

- Уравнения плоскости в пространстве

1) Общее $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$;

2) По трём точкам $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$;

3) В отрезках $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$;

4) Нормальное $\cos(\varphi_1)\cdot x+\cos(\varphi_2)\cdot y+\cos(\varphi_3)\cdot z=p$,

где $\cos(\varphi_1)=\pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos(\varphi_2)=\pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

$\cos(\varphi_3)=\pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $p=\mp\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

5) Параметрическое $\begin{cases} x(t)=x_0+\alpha_1\cdot t+\alpha_2\cdot p \\ y(t)=y_0+\beta_1\cdot t+\beta_2\cdot p \\ z(t)=z_0+\gamma_1\cdot t+\gamma_2\cdot p \end{cases}$, t, p – параметры.

- Уравнения прямой в пространстве

1) Общее $\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases};$

2) В проектирующих плоскостях $\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y \ + \quad D_1 = 0 \\ \ B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases};$

3) Параметрическое $\begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha \cdot t \\ y(t) = y_0 + \beta \cdot t \ , \quad t - \text{параметр} \\ z(t) = z_0 + \gamma \cdot t \end{cases};$

4) Каноническое $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma};$

5) По двум точкам $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$

- Расстояние от точки до плоскости $d = \dfrac{|A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$
- Угол между прямой и плоскостью $\sin(\varphi) = \dfrac{|\bar{e}_{\text{прям}} \cdot \bar{n}_{\text{плоск}}|}{|\bar{e}_{\text{прям}}| \cdot |\bar{n}_{\text{плоск}}|}.$

- Уравнение эллипса :

1) Каноническое $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$

a, b – полуоси, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ - фокусное расстояние, (x_0; y_0) – центр;

2) Параметрическое $\begin{cases} x(t) = x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y(t) = y_0 + b \cdot \sin(t) \end{cases}$ t – параметр (угол);

- Уравнение гиперболы:

1) Каноническое $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$

a, b – полуоси, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - фокусное расстояние, (x_0; y_0) – центр;

2) Параметрическое $\begin{cases} x(t) = x_0 + a \cdot ch(t) \\ y(t) = y_0 + b \cdot sh(t) \end{cases}$ t – параметр (угол);

где $sh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ - гиперболический синус,

$\mathrm{ch}(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ - гиперболический косинус;

- Уравнение параболы $(y-y_0)^2=\pm 4p\cdot(x-x_0)$,

  либо $(x-x_0)^2=\pm 4p\cdot(y-y_0)$;

- Всякая поверхность второго порядка является одной из перечисленных:

1) Эллипсоид $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$;

   (или сфера при a=b=c=R)

2) Гиперболоид

   2.1 Однополостный $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$;

   2.2 Двуполостный $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$;

3) Параболоид

   3.1 Эллиптический $\pm(z-z_0)=\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}$;

   3.2 Гиперболический $\pm(z-z_0)=\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}$;

4) Конус второго порядка $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$;
5) Цилиндрическая поверхность (отсутствие одной или двух переменных);
6) Пара пересекающихся плоскостей $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=0$;
7) Пара параллельных плоскостей $(x-x_0)^2=a^2$;
8) Пара совпавших плоскостей $(x-x_0)^2=0$;
9) Точка $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$;
10) Мнимая поверхность $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=-p^2$.

3 Контрольная работа

Дз-2 часть 1 **Домашняя контрольная работа по теме «Предел, непрерывность, производная функции одной переменной» выдаётся на 2неделе, сдача на 13 неделе 2 семестра**

В КАЖДОМ ВАРИАНТЕ

№1 –4 балла, №2 – 2 балла, №3: 1–2 б., 2– 1 б., 3–2 б., 4 –2б., 5 – 16 б.

Вариант №1

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^3-4x^2+3x}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+1}\right)\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{при } -5\le x\le -1\\ \dfrac{2}{x+1} & \text{при } -1<x<0\\ 3\sin(2x) & \text{при } 0\le x\le 2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{\lg^3 2x\cdot(2x-1)^3}{\sqrt{1-x}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2+1\\ y=2t^2+t\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^3-2\right)^{x-1}$; б) $x^3-3xy+2y^3+2y+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$\lg(99)$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$; б) $s(t)=(2t+3)\cdot e^{-2(t+1)}$.

Вариант №2

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-4x^2+4x}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x)-\sin(3)}{6-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & \text{при} \quad x\le -3 \\ \dfrac{1}{2x+6} & \text{при} \quad -3<x<0 \\ (x-3)^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 4 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x^3+3)\cdot tg(x^2)}{\ln 3x};$$

2. Найти y'_x *и* y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases} x=3-4t^3 \\ y=e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1-2x^3\right)^{\sin x+1}$; *б)* $\sin(2x)-x\cdot y^3+3y+3=0$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2-x^2}{x+4}$; *б)* $s(p)=\dfrac{e^{2(p+1)}}{2(p+1)}$.

Вариант №3

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{5x^2+2x-3}{x^3-2x^2-3x}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-3}\right)^{3x-x^2}$;

3) $\lim\limits_{s\to\infty}\left(s\cdot(ln(s+1)-ln(s+5))\right)$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{при} \quad x\le -1\\ \dfrac{2}{x+2} & \text{при} \quad -1<x<0\\ -cos(3x) & \text{при} \quad 0\le x\le 2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{3\cdot(x-x^2)+arcsin\,x}{x^3-4};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=-1$

$$\begin{cases}x=t+3t^2\\ y=2^{2t+2}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(x\text{-}1)^{x^{x+11}}$; б) $tg(3x)+e^x\cdot y^4+3y=1$;

4. Вычислить приближенно

$\cos 44^o$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-2x}{3-x}$; б) $d(s)=3\cdot ln\left(\dfrac{s}{s\text{-}3}\right)\text{-}1$.

Вариант №4

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-7x+6}{3x^2-4x+1}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3t-1}-\sqrt{3t+2}}{6-2t}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-6x^2\right)^{\frac{x-3}{x^2}}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{при} \quad -5<x\le -2\\ (x-3)^2 & \text{при} \quad -2<x<0\\ \dfrac{1}{2x+6} & \text{при} \quad x\ge 0\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x+1)^{10}+arctgx}{\sin 4x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2\\ y=t^5-3t\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^3-3\right)^{\lg 3x+1}$;   б) $arctg(5x\text{-}1)+x^2\cdot y^3\text{-}3y=x$;

4. Вычислить приближенно

$$2^{0,98};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x}{x+4}$;   б) $S(t)=(5-t)\cdot e^{t-2}$.

Вариант №5

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{x^2-4x+3}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{p\to\infty}\left(p^2\cdot(\sqrt{p^2-3p}-\sqrt{p^2+p}\ )\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3}\right)^{3x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1 \\ (x+2)^2-2 & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 3\sin(2x) & \text{при} \quad x\ge 0 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции
   $f(x)=arccos((3x-2)^2)\cdot ln(cos\,x+3)\cdot tg^4(x)$;
2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$
   $\begin{cases} x=t-t^2 \\ y=t+3t^3 \end{cases}$;
3. Найти производную функции
   $f(x)=(4x\text{-}6)^{x\text{-}3}$; б) $x\cdot e^{2x}+x^3\cdot y^4\text{-}2tg(y)=0$;
4. Вычислить приближенно
   $\cos(61^{o})$;
5. Провести полное исследование функции и построить график
   а) $y(x)=\dfrac{4-x^2}{x+3}$; б) $H(t)=\dfrac{e^{2\text{-}t}}{2-t}$.

Вариант №6

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(x)-\cos(1)}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{4x-3}\right)^{-x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}(x-3)^2 & \text{при} \quad x\le -3\\ \dfrac{3}{2x}+2 & \text{при} \quad -3<x<0\\ tg\left(\dfrac{x}{4}\right) & \text{при} \quad 0\le x<2\pi\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2}{cos(2x-3)-3}\right)^4\cdot 3^{x-6}+\frac{2}{1-2x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=e^{-2+2t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1\text{-}2x^3\right)^{sin\,x+3}$; б) $x\cdot cos(3x)-2\sqrt{y}+3y+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2-x^2}{x+4}$; б) $D(k)=ln\left(\dfrac{k}{k+2}\right)+1$.

Вариант №7

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{y\to\infty}\left((y+2)\cdot(\ln(y+1)-\ln(y+5)) \right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{3-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3+x^2-2x}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{при} \quad x\le -1 \\ \dfrac{2}{x}-2 & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 3\cos(2x) & \text{при} \quad 0\le x<\pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции
$$f(x)=(2-3\cos 4x)^4\cdot\log_2\left(x^2-3x\right);$$
2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$
$$\begin{cases} x=2t^2-t \\ y=t-1 \end{cases};$$
3. Найти производную функции
а) $f(x)=(3\text{-}2\cos x)^{3-x}$; б) $2\cos^3(x)+2\sin(3y)-3y+1=0$;
4. Вычислить приближенно
$\sin(134^{\circ})$;
5. Провести полное исследование функции и построить график
а) $y(x)=\dfrac{2-3x}{x+4}$; б) $K(t)=(t-2)\cdot e^{3-t}$.

Вариант №8

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(1-\sin(2x)\right)^{\frac{-3}{x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-7x^3+6x^2}{3x^2-4x+1}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{e^{-2x}+3x^3-20\cdot lg(13x)-\sqrt{x+2}}{x\cdot\sqrt[3]{x^8-x}\ +\ 0{,}8^x-4\cos(2x)}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2x+10} & \text{при} \quad -5<x\le -2 \\ (x-3)^2 & \text{при} \quad -2<x<0 \\ -2\ln(x+1) & \text{при} \quad x\ge 0 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции
$$f(x)=\left(\frac{2x}{\cos^2(2x-3)-3}\right)\cdot 3^{x-6};$$
2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$
$$\begin{cases} x=t^2+t \\ y=e^{-2+2t} \end{cases};$$
3. Найти производную функции
   а) $f(x)=\left(4+x^3\right)^{2x+3}$; б) $2^{2x\text{-}1}+3x\cdot y^7\text{-}5y+\sqrt{2}=0$;
4. Вычислить приближенно
   $\arcsin(0{,}995)$
5. Провести полное исследование функции и построить график
   а) $y(x)=\dfrac{x^2}{3x-6}$; б) $x(y)=\dfrac{e^{2(y-1)}}{2(y-1)}$.

Вариант №9

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-3}\right)^{-5x}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+n}\ )\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{4x^2-6x+2}{x^4-4x^3+3x^2}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+10} & \text{при} \quad -5\le x\le -1\\ \dfrac{-4}{x+1} & \text{при} \quad -1<x<0\\ 3\sin(2x) & \text{при} \quad 0\le x<2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(ln^3 3x+2x\right)^5\cdot x\ ;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t-4\\ y=t^3-2t\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(2+ln(x))^{4x\text{-}3}$; б) $x\cdot 2^x+x^3\cdot y^2-3y+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$\mathrm{arctg}(0{,}99)$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-4}$; б) $L(p)=3-3\,ln\left(\dfrac{p}{4+p}\right)$.

Вариант №10

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{6x^3 - 2x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x) - \sin(3)}{6-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 3} \right)^{x^2 - 2x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} 2\cdot \lg(-(3+x)) & \text{при} \quad x < -3 \\ \dfrac{1}{2x-2} & \text{при} \quad -3 < x < 0 \\ (x-3)^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 4 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{x^2} \right)^4 \cdot \cos^3\left(x^3 - 4\right);$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 3t \\ y = t - 1 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x) = (3x - 4)^{5x}$; б) $x^{\sqrt{2}} - x \cdot y + 3\sin(y) + 1 = 0$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x) = \dfrac{2 - x^2}{x+4}$; б) $A(z) = -(2z+1)\cdot e^{2(z+1)}$.

Вариант №11

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+10}{x-3}\right)^{3-2x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2+5x-7}{x^2+5x-6}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\sin^3(2x)+3\cdot e^{2x^3}-3}{tg(x^3)-x\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{при} \quad x\le -1\\ \dfrac{2}{x+2} & \text{при} \quad -1<x<0\\ \dfrac{-|x-1|}{x-1} & \text{при} \quad 0\le x\le 2,\ x\ne 1\\ 2 & \text{при} \quad x=1\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2}{\cos^3(4x-3)}\right)^4\cdot 3^{x^2-6};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=e^{-2+2t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(3+2x^3\right)^{2x+3}$; б) $\log_2(2x\text{-}10)+\sqrt{2y}+3y=1$;

4. Вычислить приближенно

$(2{,}03)^8$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$; б) $J(t)=\dfrac{e^{2(t+2)}}{2(t+2)}$.

Вариант №12

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-4x+1}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{\frac{-3}{sin(2x)}}$;

3) $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3p-1}-\sqrt{3p+k}}{6-2p}$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{при} \quad -4\le x\le -2 \\ \dfrac{2}{x+2} & \text{при} \quad -2<x<0 \\ \dfrac{1}{2x+6} & \text{при} \quad x\ge 0 \end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x^3+3)\cdot tgx}{ln(3x-1)};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases} x=3-4t^3 \\ y=e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(5x+2)^{x-x^2}$; б) $3x^4+x-3y^4+3y=2$;

4. Вычислить приближенно

$log_2(255{,}8)$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$; б) $F(s)=ln\left(\dfrac{s}{s-2}\right)-2$.

Вариант №13

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot(\sqrt{x^2-3p}-\sqrt{x^2+1}\ )\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{x^2+4x+3}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3x}\right)^{3x-x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 3\sin(x-1) & \text{при} \quad x\ge 0 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\sin^4(5x^2-\frac{x}{1-x^2})-\frac{\sqrt{7}}{x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases} x=3-t^2 \\ y=2+(t-2)^2 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(5x)^{2x-\sqrt{x}}$; б) $\sqrt[3]{2-x}+\sin^2(y)+3y-4=0$;

4. Вычислить приближенно

$\mathrm{tg}(134{,}78^{\circ})$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4x-5}$; б) $D(y)=\dfrac{2y+5}{e^{2(y+2)}}$.

Вариант №14

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{4x-3}\right)^{-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x^2-a^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(x+3)^2} & \text{при} \quad -6<x\le -3\\ 2x+3 & \text{при} \quad -3<x\le 0\\ tg\left(\dfrac{x}{4}\right) & \text{при} \quad 0<x<2\pi\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=2^4\cdot(5x^2-\frac{x}{1+x^2})-\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{x}\right)\cdot\frac{1}{x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 0

$$\begin{cases}x=3-6t\\ y=t\cdot(t-2)^2\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{2\sqrt{x}}$; б) $x\cdot\sin(x)\cdot y^3+2y=3$

4. Вычислить приближенно

$\sqrt[3]{-7{,}85}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$; б) $C(h)=\dfrac{e^{3-h}}{3-h}$.

Вариант №15

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{4x+1}\right)^{3-x}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+5)\cdot(ln(x+3)-ln(x+1))\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-8}{x^3+x^2-6x}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, a_4= $+\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1 \\ \frac{-2}{(1-x)^3} & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 2cos(2x) & \text{при} \quad 0\le x<\pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=arcsin\left(x^3\cdot\sqrt[5]{lg\,(3x\text{-}1)}\right)-\sqrt[21]{3-4e^2};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases} x=(2t-1)^2 \\ y=(t-1)\cdot sin(t-2) \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(3x+2)^{-ln\,x}$; б) $x^{-3}+2\,sin\,(3y)\text{-}4y+x=1$;

4. Вычислить приближенно

$\sqrt[4]{257}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\frac{x^2+1}{x^2-5x}$; б) $P(t)=2\,ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$ - 1.

Вариант №16

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{e^{x}+3x^{3}-20\cdot\log_3(13x)-\sqrt{x^{2}+2}}{x\cdot\sqrt[3]{x^{5}-x^{2}}\ +\ 0{,}8^{-x}-4\cos^{2}(x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{4}-16}{3x^{2}-4x-4}$ при a_1= -2, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(1+tg(2x)\right)^{\frac{3}{x}}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2x} & \text{при} \quad -5<x\le -2 \\ (x-3)^{2} & \text{при} \quad -2<x<0 \\ 2\lg(x+2) & \text{при} \quad x\ge 0,\ x\ne 8 \\ 0 & \text{при} \quad x=8 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции
$$f(x)=\left(\sin^{3}\left(x^{2}-4\right)-\cos(2)\right)\cdot\log_3\left(x^{4}-2\arcsin(0{,}4)\right);$$
2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2
$$\begin{cases} x=t^{2} \\ y=3\cdot\ln t \end{cases};$$
3. Найти производную функции

   а) $f(x)=\left(x^{2}+3\right)^{x+3x^{3}}$; б) $x^{6}-x\cdot y^{5}+3y=3$;
4. Вычислить приближенно

   tg(134,6°);
5. Провести полное исследование функции и построить график

   а) $y(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x+2}$; б) $E(s)=(4-s)\cdot e^{s-3}$.

Вариант №17

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\cdot\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+n}\right)\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3+4x^2-7x}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{при } -5\le x\le -1\\ \dfrac{2}{x+1} & \text{при } -1<x<0\\ 2\cos(x) & \text{при } 0\le x\le 2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции
$$f(x)=2^{x^2\cdot\cos(3x-4)}\cdot\left(tg(1)-\frac{3}{4x-2}\right);$$
2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$
$$\begin{cases}x=t+t^3\\ y=(t-1)^2\end{cases};$$
3. Найти производную функции

   а) $f(x)=\left(x+3x^4\right)^{x+3}$; б) $\dfrac{1}{x-1}+x^2\cdot y^3-4y+2=0$;
4. Вычислить приближенно
$$\frac{1}{\sqrt[3]{8{,}02}};$$
5. Провести полное исследование функции и построить график

   а) $y(x)=\dfrac{x-1}{2x+2}$; б) $L(k)=-\dfrac{e^{-2(k+2)}}{2(k+2)}$.

Вариант №18

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-4x^2+4x}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin^2(x-2)+\sqrt{2x-3}}{tg^3(4-2x)}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} 4x+10 & \text{при } -5<x\le -3 \\ \dfrac{6}{2x+6} & \text{при } -3<x<0 \\ (x-3)^2-2 & \text{при } 0\le x\le 4 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов.

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(tg^2\left(x^2-4\right)-4\right)\cdot 2^{x^4-2\arcsin(0.3)}\ ;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases} x=t^2+3t \\ y=3e^{2t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=x^{2-3x^2}$; б) $y^4-3x\cdot e^{3x}+y-12=0$;

4. Вычислить приближенно

$\sqrt{120{,}6}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{3x^2-3}{x+2}$; б) $S(h)=2\ln\left(\dfrac{h+3}{h}\right)-3$.

Вариант №19

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{s\to+\infty} \left((1-s)\cdot(ln(s+5)-ln(s+5)) \right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{5x^2+2x-3}{x^3-x^2}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4x+1}{3x-3}\right)^{3x-x^2}$;

3).

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & \text{при} \quad -4<x\le-1\\ \dfrac{2}{x+1} & \text{при} \quad -1<x<0\\ 3cos(2x)-1 & \text{при} \quad 0\le x<\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=arctg(x^5-3x)\cdot\frac{sin^3(3)}{\sqrt[5]{2x-4}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases}x=t-t^2\\ y=3(t+2t)^2\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(x+5x^2)^{-x^2}$;   б) $y\cdot arctg(2x)-4y^4+3=x$;

4. Вычислить приближенно

$(1.005)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x}$;   б) $F(y)=(2y\text{-}1)e^{2(1\text{-}y)}$.

Вариант №20

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-6x^2\right)^{\frac{x-3}{x^2}}$;;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!+3n^2-4\sqrt{3n+2}}{6-2n^8+10^n}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-x^2}{3x^2-4x+1}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, a_4=$-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}-2x+5 & \text{при} \quad -5<x\le -2\\ sin(x+2) & \text{при} \quad -2<x<0\\ \dfrac{1}{2x-4} & \text{при} \quad x\ge 0,\ x\ne 2\\ 2 & \text{при} \quad x=2\end{cases},$$ построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=2^{\sqrt{3}\cdot log_3(3x^2-5x)}\cdot sin(\sqrt{x});$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=3e^{t-1}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=x^{-3x^2-x}$; б) $3x^{-7}+\dfrac{2y}{3x\text{-}2}+1=0$;

4. Вычислить приближенно
arctg(0,995);

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+2x^2}$; б) $X(p)=\dfrac{e^{-(p+2)}}{p+2}$.

Вариант №21

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3}\right)^{3x}$;

2) $\lim\limits_{p\to\infty}\left(p^2\cdot(\sqrt{p^2-3p}-\sqrt{p^2+p}\ )\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-2x^2+2x}{x^3-27}$ при a_1=0, a_2=3, a_3= -1, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}4\cdot\dfrac{1}{x+5}+3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1\\ (x+2)^2-2 & \text{при} \quad -1<x<0\\ 2 & \text{при} \quad x=0\\ 3\,log_{0,5}(2x) & \text{при} \quad 0<x\le 2\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2\sin(6x-1)+1}{\cos^3(2x+3)}\right)^3;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=3t^2+t\\ y=e^{-2+2t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(x\text{-}2)^{\sin x+3}$; *б)* $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\text{-}3y^4+2$;

4. Вычислить приближенно

$(2.001)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x+4}$; *б)* $Z(t)=2\ln\left(\dfrac{t}{t\text{-}4}\right)\text{-}3$.

Вариант №22

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{a-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{-x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3-x} & \text{при} \quad -5\le x\le -3\\ \dfrac{3}{2x}+2 & \text{при} \quad -3<x<0\\ 2tg\left(\dfrac{x}{4}\right) & \text{при} \quad 0\le x<2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2x}{\cos^3(2x-3)-3}\right)^4;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=e^{-2+2t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1\text{-}2x^3\right)^{\sin x+3}$; б) $\dfrac{x}{2x-1}-\sin^2(y)-3y+2=0$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2-x^2}{x+4}$; б) $F(s)=\text{-}(s+1)\cdot e^{(s+2)}$.

Вариант №23

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{3-x^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n-3)^{20}+(2n-1)^{10}}{3n^{20}-2n^4-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+3x^2-2x}$ при a_1=0, a_2=-2, a_3= -1, $a_4=+\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{при} \quad x\le -1 \\ \dfrac{2}{x}-2 & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 1-\cos(3x) & \text{при} \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\sqrt{2-\frac{2}{\arcsin(x-2^{3x})}}+4\cos(2-\sqrt{3});$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 1

$$\begin{cases} x=2t^2-t \\ y=\ln(3t-2) \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1-\lg(2x)\right)^{4x}$; б) $x\cdot \operatorname{arctg}(2x)-4x\sin(3y)+y=1$;

4. Вычислить приближенно

arctg(1.05);

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{-x^2}{x^2-9}$; б) $K(h)=\dfrac{e^{h+3}}{h+3}$.

Вариант №24

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{-2x}+3x^3-20\cdot lg(13x)-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x^{10}-x}\;+\;0{,}8^x-(2x-3)^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-7x^3+6x^2}{3x^2-4x+1}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(1+sin(3x)\right)^{\frac{-3}{x}}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+4} & \text{при} \quad -5<x\le -2\\ 1+(x-2)^2 & \text{при} \quad -2<x<0\\ 2\,ln(x+1) & \text{при} \quad x\ge 0\end{cases},$$ построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=cos((3x-2)^2)\cdot(cos^6(2x)+3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3x-2}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=2-t^2\\ y=e^{t-1}+3t^3\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^{3x-2}$; б) $x\cdot arctg(3x+1)-2x^2\sqrt[3]{y+1}=3$;

4. Вычислить приближенно

$\cos 121^{o}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{4-x^2}{x+3}$; б) $D(s)=ln\left(\dfrac{s}{s+5}\right)$-1.

Вариант №25

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot(\sqrt{n^2-4}-\sqrt{n^2+3n}\ )\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-3}\right)^{-5x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{4x^2-6x+2}{4x^4-4x^3}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases}3\sqrt{2x+10} & \text{при} \quad -5\le x\le -1\\ 2\sin(x+1) & \text{при} \quad -1<x<\pi-1\\ \dfrac{-3}{x-\pi} & \text{при } \ 0\le x\le 2\pi,\ x\ne\pi\\ 2 & \text{при} \quad x=\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\log_3(x-arctg(x\cdot 2^{3x}));$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=3t-2t^2\\ y=t+3t^3\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(4x^2\text{-}6\right)^x$; *б)* $\dfrac{\sin(2x)}{x}+\sqrt{\dfrac{3}{y\text{-}1}}+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$$(2{,}02)^{-3};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+3}$; *б)* $F(c)=-(2c+3)\cdot e^{2(c+2)}$.

Вариант №26

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x)-\sin(3)}{6-2x}$

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{6x^3-2x^2+4x}{x^2+4x+4}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, a_4=$-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3}\right)^{x^2-2x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} ctg(x) & \text{при } x<-3, x\neq \pi\cdot n \\ 3 & \text{при } x<-3, x=\pi\cdot n \\ \dfrac{1}{2x-2} & \text{при } -3<x<0 \\ x & \text{при } 0\leq x\leq 4 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{2\cdot(2x-1)^3}{\sqrt{1-x}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases} x=3t^2+1 \\ y=t^2+t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^2-2\right)^{4x-1}$; б) $ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)-y\cdot cos(3y)+x=1$;

4. Вычислить приближенно

$$\sqrt[3]{-64{,}2}$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2+1}{x+3}$; б) $J(t)=-\dfrac{e^{-2(t-1)}}{2(1-t)}$.

Вариант №27

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\sin^3(2x)+3\cdot e^{2x}-3}{tg\left(\frac{2}{x}\right)-x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x^2+5x-7}{x^3-5x^2-6x}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4x+10}{4x-3}\right)^{3+x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{при} \quad x\le -3 \\ \dfrac{2}{x+3} & \text{при} \quad -3<x<0 \\ \dfrac{|x-3|}{x-3} & \text{при} \quad 0\le x\le 5,\ x\ne 3 \\ 2 & \text{при} \quad x=3 \end{cases}$$
, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x^3+3)\cdot tg(x^2)}{1+e^{3x-2}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases} x=3-4t^3 \\ y=e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1\text{-}2x^3\right)^{\sin x+1}$; б) $(x\cdot\sin(x)+1)\cdot(y^3-3y)+x=1$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{4-x^2}{x+4}$; б) $Y(p)=ln\left(\dfrac{p\text{-}5}{p}\right)+2$.

Вариант №28

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+k}}{6+2n}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0-0} (1+6x)^{\frac{2}{sin(2x)}}$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-4x^2}{3x^2-4x+1}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} 2(x+3)^2 & \text{при} \quad -4\le x\le -2 \\ \dfrac{-2}{(x+2)^2} & \text{при} \quad -2<x<0 \\ \dfrac{1}{2x+1} & \text{при} \quad x\ge 0 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{3\cdot(x-x^2)+\arcsin(\sqrt{2}-1)}{x^3-4};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=-1$

$$\begin{cases} x=t^3+3 \\ y=2^{2t+2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(x-1)^{x-5x^2}$; б) $3tg(2x)\cdot\ln(2x)-\sqrt{y^3-3y}+3=1$;

4. Вычислить приближенно

$\cos 44^o$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-4x}{3-x}$; б) $G(t)=(t+4)\cdot e^{-(t+3)}$.

Вариант №29

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot(\sqrt{x^2-3p}-\sqrt{x^2+1})\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-5x-6}{5x^2+x-6}$ при a_1=6, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{-x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)^2 & \text{при} \quad -5<x\le-1\\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{при} \quad -1<x<0\\ 3\sin(2x-1) & \text{при} \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{3}+1\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x+1)^{10}-arctg(2x)}{2-e^{3x}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2-2t\\ y=t^5-3t\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^3-3\right)^{lg\,3x+1}$; б) $\cos\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)\cdot y^3-2y+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$4^{0,98}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{0,5\cdot x^2}{x+4}$; б) $F(h)=\dfrac{e^{h-3}}{h-3}$.

Вариант №30

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-8x}{3x^2-4x+4}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{sin\left(\frac{1}{2x}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos(x)-2}{x^2-x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{(x+3)^2} & \text{при} \quad -6<x\le-3\\ (2x+4)^2 & \text{при} \quad -3<x\le 0\\ 2+tg\left(\dfrac{x}{4}\right) & \text{при} \quad 0<x\le 2\pi\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2\sin(4x-1)}{\cos^3(x+3)-2}\right)^2;$$

2.. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=e^{-2+3t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(2x-2)^{sin(2x)+3}$; б) $x-3\cos^6(2x)+x\cdot y^6-y=0$

4. Вычислить приближенно

$(4.001)^3$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4}$; б) $A(y)=ln\left(\dfrac{y+6}{y}\right)-1$.

2.

2.2 Пример решения части 1

Вариант №31

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{3-2x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x^2+5)\cdot(\ln(x+8)-\ln(x-1))\Big)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}$ при a_1=1, a_2=0, a_3= 3, a_4= $-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^3}+5 & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 1+2\cos(2x) & \text{при} \quad 0\le x<\pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{tg^3 2x\cdot\ln 5x}{\sin 5x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx}, составить уравнения касательной и нормали

при $t=\frac{\pi}{2}$ для $\begin{cases} x=\cos t \\ y=t^2+3t \end{cases}$;

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(3+\sin x)^{4x+2}$; б) $2x^5-3xy^3-2y^4-1=0$;

4. Вычислить приближенно

$\cos 59^o$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\frac{2x^2}{x-1}$; б) $S(t)=(3-t)\cdot e^{t-2}$.

№1 Вычислить пределы

1.1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{3-2x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{3-2x^2}=\left[\begin{array}{c}1^{\infty}\\ \text{применим } 2^{\text{й}}\\ \text{замечательный предел}\end{array}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x+1)+2}{3x+1}\right)^{3-2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{3-2x^2}=\left[\begin{array}{c}\alpha=\dfrac{2}{3x+1}\\ \alpha\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\\ \text{выделим в показателе } \dfrac{1}{\alpha}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}\cdot\frac{2}{3x+1}\cdot(3-2x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}}\right)^{\frac{2}{3x+1}\cdot(3-2x^2)}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}}\right)\right\}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3x+1}\cdot(3-2x^2)}=\left[\lim_{\alpha\to o}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\right]=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3x+1}\cdot(3-2x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6-4x^2}{3x+1}}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{6-4x^2}{3x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty\\ e^{-\infty}=0\end{array}\right]=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{3-2x^2}=0;$$

1.2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x^2+5)\cdot(ln(x+8)-ln(x-1))\Big).$

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big((x^2+5)\cdot(ln(x+8)-ln(x-1))\Big)=\begin{bmatrix}\text{Свойство}\\ \text{логарифма}\end{bmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\left((x^2+5)\cdot ln\left(\frac{x+8}{x-1}\right)\right)=$$

$$=\left[\frac{x+8}{x-1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left((x^2+5)\cdot ln\left(\frac{x-1+9}{x-1}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left((x^2+5)\cdot ln\left(1+\frac{9}{x-1}\right)\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{9}{x-1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\\ ln(1+\alpha)\underset{x\to0}{\sim}\alpha\end{bmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\left((x^2+5)\cdot\frac{9}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\cdot\frac{x^2+5}{x-1}\right)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big((x^2+5)\cdot(ln(x+8)-ln(x-1))\Big)=0;$$

1.3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}$ при a_1=1, a_2=0, a_3= 3, a_4= $-\infty$.

Решение: 1.3.1 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}=\dfrac{2-5-3}{1+2-15}=\dfrac{-6}{-12}=0{,}5;$

1.3.2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}=\left[\dfrac{0+0-3}{0+0+0}=\dfrac{-3}{0}\right]=\infty;$

1.3.3 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}=\left[\dfrac{18-15-3}{27+18-45}=\dfrac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}x=3-\text{корень}\\ \text{числителя и знаменателя}\\ \text{разложим их на множители}\end{bmatrix}=$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2\cdot(x-3)\cdot(x+0{,}5)}{x\cdot(x-3)(x+5)}=\lim_{x\to3}\frac{2\cdot(x+0{,}5)}{x\cdot(x+5)}=\frac{2\cdot3+1}{3\cdot(3+5)}=\frac{7}{24};$$

1.3.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\text{, разделим дробь на } x^3\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1+2\cdot\frac{1}{x}-15\cdot\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{2\cdot0-5\cdot0-3\cdot0}{1+2\cdot0-15\cdot0}=0.$$

Можно вычислить предел частного двух многочленов из условия, что наибольшая степень дроби находится в знаменателе. Такой предел на бесконечности равен нулю.

Ответ: 1) 0,5; 2) ∞; 3) $\dfrac{7}{24}$; 4) 0.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^3}+5 & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 1+2\cos(2x) & \text{при} \quad 0\le x<\pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

Решение :

2.1) Значения функции *f(x)* можно вычислить при $x\in[-5;-1]$, $x\in(-1;0)$, $x\in[0;\pi]$. Функция *f(x)* на каждом участке области определения задана (нет точек, в которых невозможно вычислить *f(x)*), объединение всех участков даёт для функции *f(x)* область определения $D_f=[-5;\pi]$ т.к. $[-5;-1]\cup(-1;0)\cup[0;\pi]=[-5;\pi]$;

2.2) Построим график функции, построив графики

- $y_1=x-3$ при $x\in[-5;-1]$,
- $y_2=\dfrac{-2}{(x+1)^3}+5$ при $x\in(-1;0)$,
- $y_3=1+2\cos(2x)$ при $x\in[0;\pi]$.

$y=f_1(x)$

x

Рисунок 1

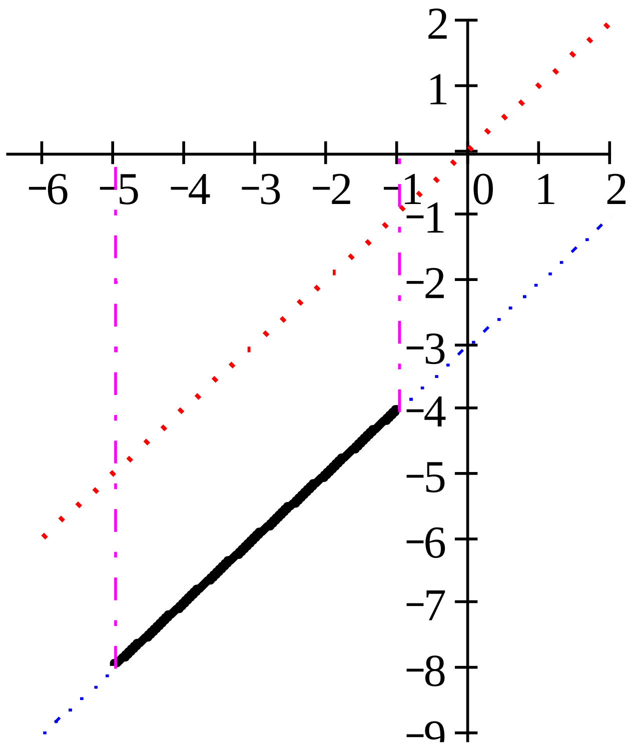


График $y_1 = x - 3$ – прямая, с угловым коэффициентом k=1 и сдвигом вниз относительно начала координат на b=3.

Прямую можно построить и по двум точкам:

а) взять x_1 и вычислить $y(x_1)$, например

при x= -5 y(-5)= -5 -3= -8;

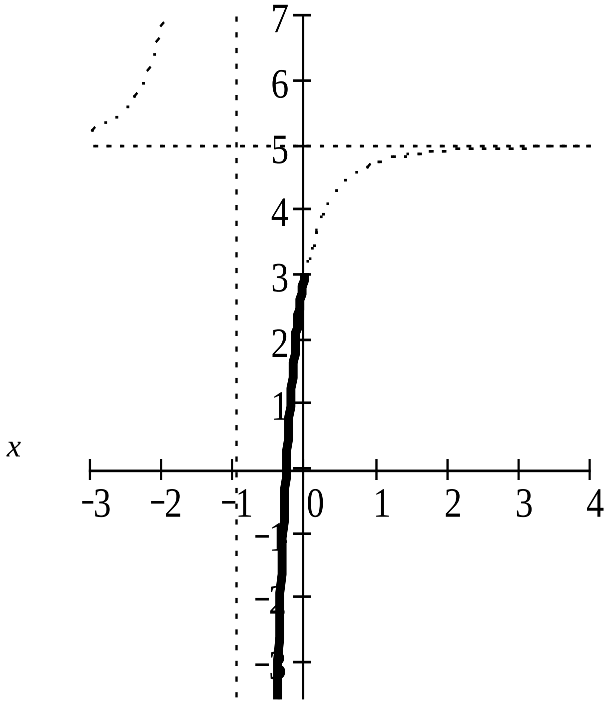
б) взять x_2 и вычислить $y(x_2)$, например

при x= -1 y(-1)= -1 -3= -4;

в) построить прямую по найденным точкам (-5; -8) и (-1; -4).

График функции изобразим на промежутке $x \in [-5; -1]$, на котором задана функция y_1.

График функции $y_1 = x - 3$ показан на рисунке 1.



ок 2

График $y_2 = \dfrac{-2}{(x+1)^3} + 5$ – гипербола, получаемая из $y = \dfrac{1}{x^3}$ растяжением в 2 раза вдоль оси OY вместе с переворотом относительно OX, сдвигом влево на 1 и вверх на 5 единиц.

Функция $y_2(x)$ задана на интервале $x \in (-1;0)$.

График $y = f_2(x)$ показан на рисунке 2.

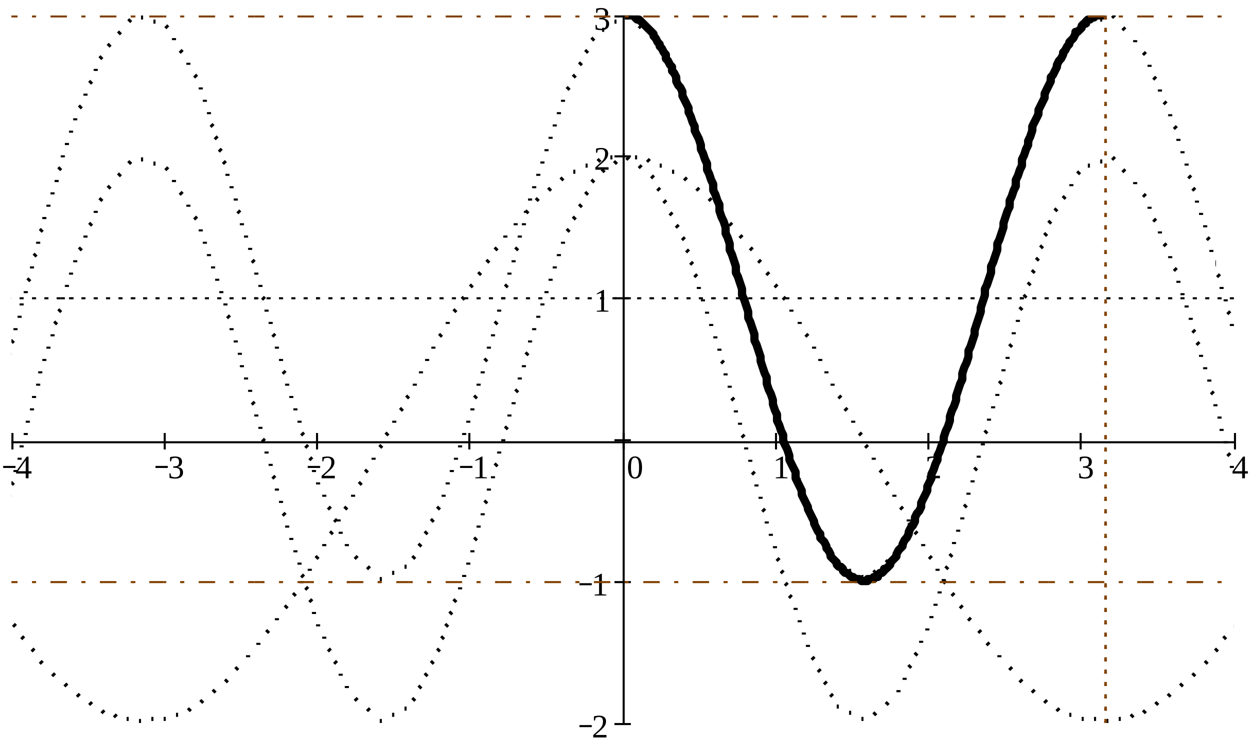
График $y_3 = 2\cos(2x) + 1$ получается из графика $y = \cos(x)$ сжатием в 2 раза вдоль оси OX, растяжением в 2 раза вдоль оси OY и сдвигом вверх на 1 единицу. График $y = f_3(x)$ показан на рисунке 3.

Функция $f_3(x)$ задана на отрезке $x \in [0;\pi]$.

y=1+2cos(2x)

y=2·cos(2x)

X



2.3) Исследуем функцию *f(x)* на непрерывность.

Функция $y_1 = x - 3$ задана на отрезке $x \in [-5; -1]$. Функция $y_1(x)$ является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции в точках соответствующего интервала (-5; -1).

Функция $y_2 = \dfrac{-2}{(x+1)^3} + 5$ задана на интервале $x \in (-1; 0)$, в его точках функция $y_2(x)$ является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции.

Функция $y_3 = 1 + 2\cdot cos(2x)$ задана на отрезке $x \in [0; \pi]$. Функция $y_3(x)$ является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции. в точках соответствующего интервала $(0; \pi)$.

Вывод: Разрывы функции *f(x)* возможны только на границах участков области определения.

Рассмотрим каждую из границ области определения x_1= -5, x_2= -1, x_3=0, $x_4 = \pi$.

2.3.1) x= -5, $f(-5) = \left|1^я \text{ строка}\right| = -5 - 3 = -8$.

Функция *f(x)* задана только при x ≥ -5,

предел справа $\lim\limits_{x \to -5+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -5+0} (x - 3) = -5 - 3 = -8$ существует, конечен и равен *f*(-5) т.е *f(x)* в точке x=-5 непрерывна справа;

2.3.2) x= -1, $f(-1) = \left|1^я \text{ строка}\right| = -1 - 3 = -4$.

Предел слева $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \left|1^я \text{ строка}\right| = \lim\limits_{x \to -1-0} (x - 3) = -1 - 3 = -4$, предел справа $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \left[2^{я} \text{ строка}\right] = \lim\limits_{x\to -1+0} \left(\dfrac{-2}{(x+1)^3} + 5 \right) = [-\infty + 5] = -\infty$.

Среди частичных пределов в точке x= -1 имеется бесконечный, x= -1 является точкой разрыва второго рода;

2.3.3) x=0, $f(0) = \left[3^{я} \text{ строка}\right] = 1 + 2 \cdot cos(0) = 1 = 2 = 3$.

Предел слева $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \left[2^{я} \text{ строка}\right] = \lim\limits_{x\to 0-0} \left(\dfrac{-2}{(x+1)^3} + 5 \right) = \dfrac{-2}{1} + 5 = 3$,

предел справа $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \left[3^{я} \text{ строка}\right] = \lim\limits_{x\to 0+0} \left(1 + 2\,cos(2x)\right) = 1 + 2\,cos(0) = 3$.

В точке x=0 частичные пределы совпадают и равны значению функции в такой точке, следовательно x=0 – точка непрерывности функции *f(x)*;

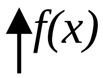
2.3.4) $x = \pi$, $f(\pi) = \left[3^{я} \text{ строка}\right] = 1 + 2\,cos(2 \cdot \pi) = 1 + 2 = 3$.

Функция *f(x)* задана только при $x \le \pi$,

предел слева $\lim\limits_{x\to \pi-0} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi-0} \left(1 + 2\,cos(2x)\right) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ существует, конечен и равен $f(\pi)$ т.е *f(x)* в точке $x=\pi$ непрерывна слева.

С учётом выполненных пунктов построим график функции *f(x).*

График изображён на рисунке 4.



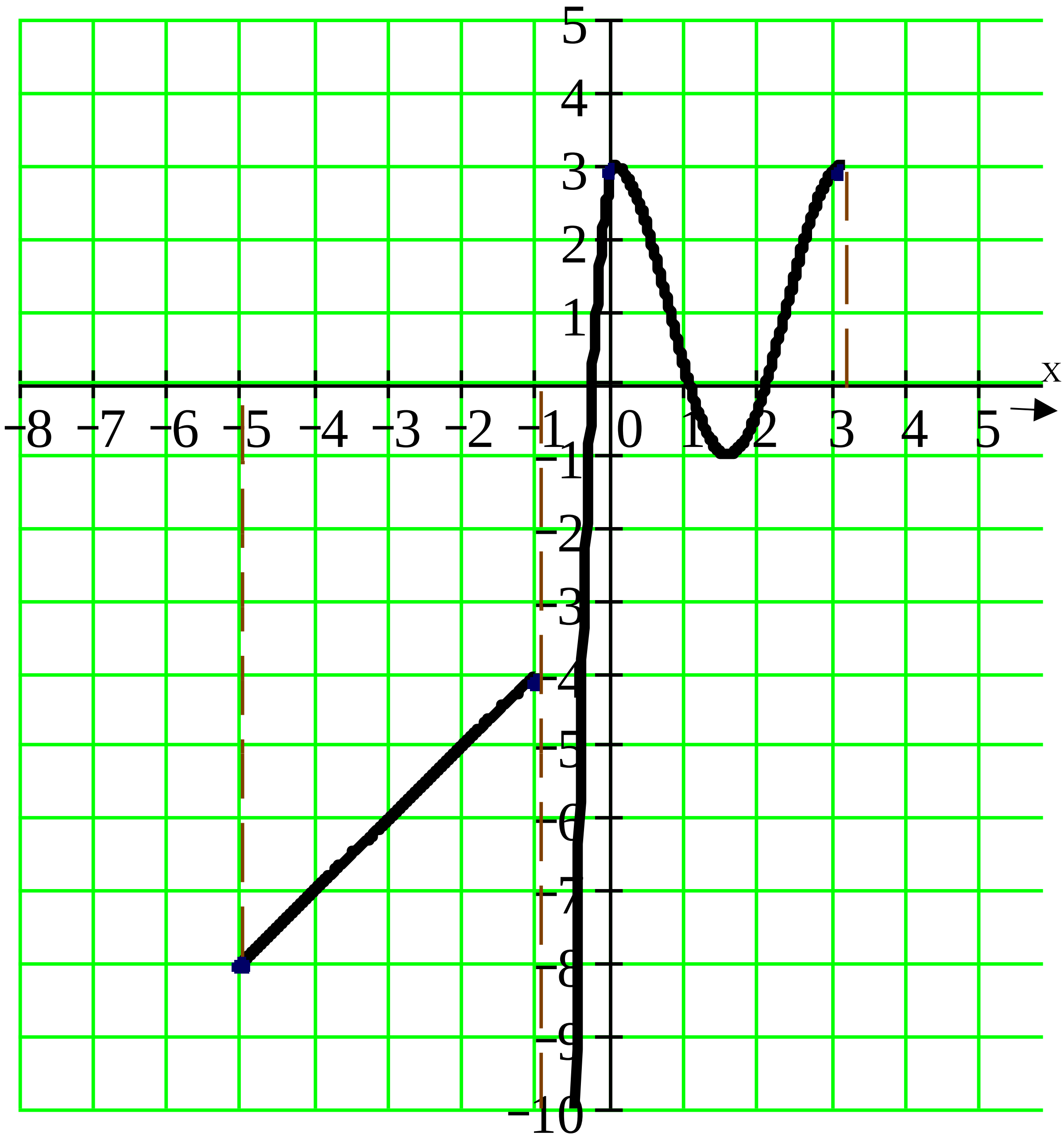


Рисунок 4

№3

3.1) Найти производную функции $f(x)=\dfrac{tg^3 2x\cdot ln5x}{sin5x}$.

Решение:

$$f'(x)=\left(\frac{tg^3 2x\cdot ln5x}{sin5x}\right)'=\frac{(tg^3 2x\cdot ln5x)'\cdot sin5x-(tg^3 2x\cdot ln5x)\cdot(sin5x)'}{sin^2 5x}=$$

$$=\frac{\left(\left(3tg^2 2x\cdot\dfrac{1}{cos^2 2x}\cdot(-sin2x)\cdot 2\right)\cdot ln5x+tg^3 2x\cdot\dfrac{1}{5x}\cdot 5\right)\cdot sin5x-(tg^3 2x\cdot ln5x)\cdot cos\ 5x\cdot 5}{sin^2 5x}=$$

$$=\frac{(-6\dfrac{sin^3 2x}{cos^4 2x}\cdot ln5x+\dfrac{tg^3 2x}{x})\cdot sin5x-5tg^3 2x\cdot ln5x\cdot cos\ 5x}{sin^2 5x};$$

Ответ: $f'(x)==\dfrac{(-6\dfrac{sin^3 2x}{cos^4 2x}\cdot ln5x+\dfrac{tg^3 2x}{x})\cdot sin5x-5tg^3 2x\cdot ln5x\cdot cos\ 5x}{sin^2 5x}$.

3.2) Найти y'_x и y''_{xx}, составить уравнения касательной и нормали при $t=\dfrac{\pi}{2}$ для $\begin{cases}x=cos\,t\\ y=t^2+3t\end{cases}$;

Решение:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(t^2+3t)'}{(cos\,t)'}=\frac{2t+3}{-sin\,t},$$

$$y''_{xx}=(y'_x)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\left(\frac{2t+3}{-sin\,t}\right)'\cdot\frac{1}{-sin\,t}=\frac{2\cdot(-sin\,t)-(2t+3)\cdot(-cos\,t)}{-sin^3 t}=$$

$$=\frac{2\,sin\,t-(2t+3)\cdot cos\,t}{sin^3 t}.$$

При $t=\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad y'_x=\dfrac{\pi+3}{-1}=-\pi-3\approx-6{,}14$, $\quad y''_{xx}=\dfrac{2}{1}=2$,

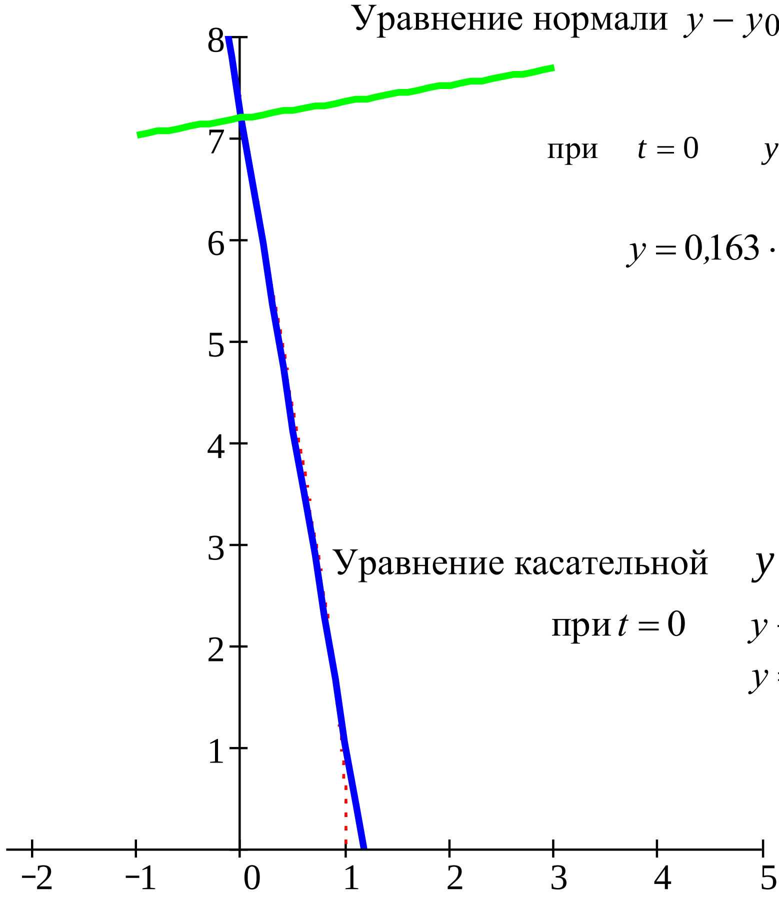
$$x_0=x\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$y_0=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{3\pi}{2}\approx 7{,}18\,.$$

Уравнение нормали $y - y_0 = \dfrac{-1}{y'_x(t_0)} \cdot (x - x_0)$,

при $t = 0$ $\quad y - 7{,}18 = \dfrac{-1}{-6{,}14} \cdot (x - 0)$,

$y = 0{,}163 \cdot x + 7{,}18$.



Уравнение касательной $y - y_0 = y'_x(t_0) \cdot (x - x_0)$,

при $t = 0$ $\quad y - 7{,}18 = -6{,}14 \cdot (x - 0)$,

$y = -6{,}14x + 7{,}18$.

Рисунок 5

Ответ: При t=0 $\quad y'_x = -\pi - 3, \quad y''_{xx} = 2$, $\quad$ касательная $y = -6{,}14x + 7{,}18$,

нормаль $\quad y = 0{,}163 \cdot x + 7{,}18$;

3.3) Найти производную функции

а) $f(x)=(3+\sin x)^{4x+2}$; **б)** $2x^5-3xy^3-2y^4-1=0$.

Решение:

а) $f(x)=(3+\sin x)^{4x+2}$.

Используем логарифмическое дифференцирование:

$$f'(x)=f(x)\cdot(\ln f(x))' = (3+\sin x)^{4x+2}\cdot\left(\ln(3+\sin x)^{4x+2}\right)' =$$
$$=(3+\sin x)^{4x+2}\cdot\left(\left(4x+2\right)\cdot\ln(3+\sin x)\right)' =$$
$$=(3+\sin x)^{4x+2}\cdot\left(4\cdot\ln(3+\sin x)+(4x+2)\cdot\frac{\cos x}{3+\sin x}\right),$$

$$f'(x)=4\cdot(3+\sin x)^{4x+2}\cdot\ln(3+\sin x)+(4x+2)\cdot\left((3+\sin x)^{4x+1}\cdot\cos x\right);$$

б) $2x^5-3xy^3-2y^4-1=0$.

Уравнение неявно задает функцию $y=y(x)$, из него может быть найдена производная $y'=\dfrac{dy}{dx}$. Продифференцируем обе части уравнения по переменной x, учитывая производную сложной функции $\left(f(y)\right)'_x=f'(y)\cdot y'$. При этом получим уравнение $2\cdot 5x^4-3\cdot(1\cdot y^3+x\cdot 3y^2\cdot y')-2\cdot 4y^3\cdot y'-0=0$.

Сгруппируем слагаемые, содержащие y' и перенесём остальные слагаемые в правую часть равенства $y'\cdot(3x\cdot y^2-8y^3)=-10x^4+3y^3$,

из чего получаем $$y'=\frac{-10x^4+3y^3}{3x\cdot y^2-8y^3}.$$

Ответ: а) $f'(x)=4\cdot(3+\sin x)^{4x+2}\cdot\ln(3+\sin x)+(4x+2)\cdot\left((3+\sin x)^{4x+1}\cdot\cos x\right)$,

б) $y'=\dfrac{-10x^4+3y^3}{3x\cdot y^2-8y^3}$.

3.4) Вычислить приближенно $\cos 59^o$.

Решение:

Пусть $f(x) = \cos(x), \quad x = \dfrac{\pi \cdot 59}{180}$ (перевели градусы в радианы).

Для такой функции $f'(x) = -\sin(x)$.

Формула приближенных вычислений $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

(по первому приближению)

Возьмём $x_0 = \dfrac{\pi}{3}, \quad \Delta x = x - x_0 = \dfrac{-\pi}{180}$,

тогда $\cos 59^o \approx \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \left(-\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\pi}{180}$,

$\cos 59^o \approx 0{,}5 + 0{,}015 = 0{,}515$.

(Калькулятор дает значение 0,515038074);

Ответ: 0,515.

3.5) Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$; б) $S(t) = (3-t) \cdot e^{t-2}$.

Решение:

а) $y(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$.

1) Область определения и область непрерывности :

Область определения функции $D_y = \{\ x \mid x \in R\ ,\ x \neq 1\ \}$.

Область непрерывности совпадает с областью определения, т.к. *y(x)* является алгебраической функцией.

При x=1 функция не определена, $\lim\limits_{x \to 1-0}\left(\dfrac{2x^2}{x-1}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0}\left(\dfrac{2x^2}{x-1}\right) = +\infty$,

т.е. x=1 для функции является точкой разрыва второго рода;

2) Четность: $y(-x) = \dfrac{2x^2}{-x-1}$,

$y(-x) \neq y(x) \Rightarrow$ нет чётности, нет симметрии относительно оси OY ;
$y(-x) \neq -y(x) \Rightarrow$ нет нечётности, нет симметрии относительно начала координат.

Вывод: функция *общего вида.*

Функция *y(x)* не периодическая;

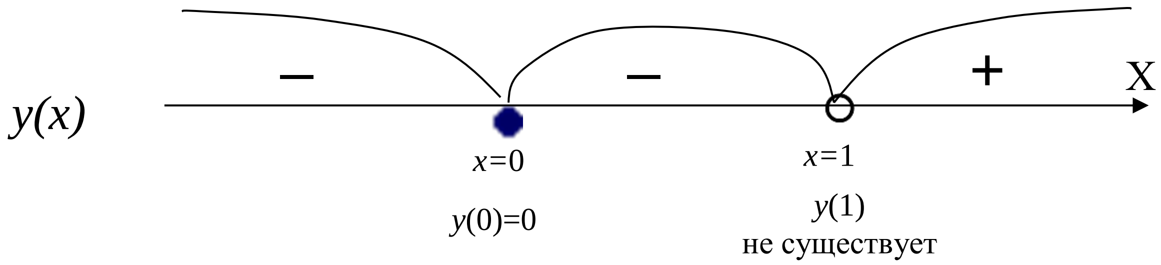
3) Пересечение с осями и знаки функции:

а) с ОУ т.е. при x=0 у(0)=0 , пересечение с осью ОУ в точке (0; 0).

б) с осью ОХ т.е. находим решение уравнения у(х)=0,

$y(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}=0$ при x=0, пересечение с осью ОХ в точке (0; 0);

Располагая по возрастанию на числовой прямой точки пересечения графика с осью ОХ и точки, где у(х) не существует, получим три промежутка. Определим знак функции в точках каждого промежутка и получим



4) Асимптоты графика:

а) Вертикальные вида $x=a$ (если хотя бы один частичный предел функции при $x \to a \pm 0$ бесконечен).

При x=1 имеется бесконечный частичный предел

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}\right)=-\infty\,,\ \lim_{x\to 1+0}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}\right)=+\infty$$ (в данном случае оба)

и в других точках функция $y(x)$ ограничена т.к. непрерывна.

Вертикальная асимптота x=1 (единственная);

б) Горизонтальные вида y=А (если предел функции при $x \to \pm\infty$ существует, конечен и равен А).

Пределы $$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}\right)=-\infty\,,\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}\right)=+\infty$$ оба бесконечные,

горизонтальных асимптот нет;

в) Наклонные асимптоты , вида $y_1=k_1\cdot x+b_1$ и $y_2=k_2\cdot x+b_2$.

Замечание: Если имеется правая (левая) горизонтальная асимптоты, то соответствующая наклонная асимптоты можно не искать.

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x(x\text{-}1)}\right)=2$$ совпадают,

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=2\ .$$

Правая и левая асимптота совпадают,

уравнение наклонной асимптоты $y=2x+2$;

5) Производная функции:

$$y'(x)=\left(\frac{2x^2}{x-1}\right)'=2\cdot\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}.$$

Критические точки производной:

а) $y'(x)=0$ при $2x^2-4x=0$, $x_1=0$ и $x_2=2$;
б) $y'(x)$ не существует при $x=1$.

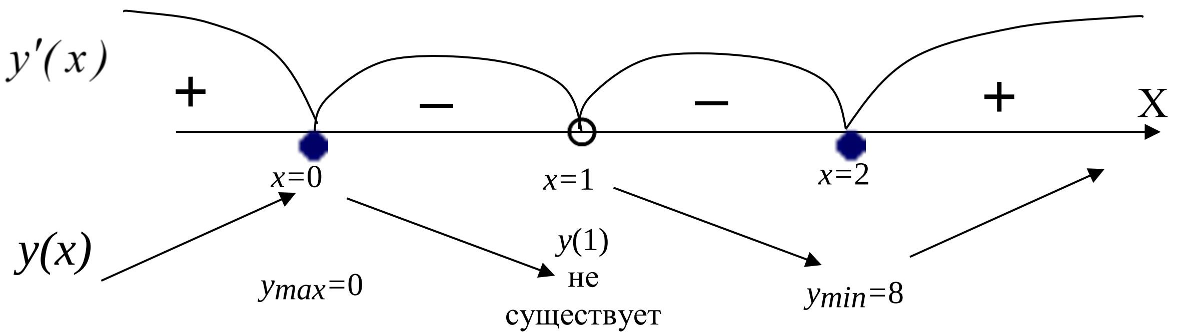
Промежутки монотонности функции:

Знаки производной на каждом промежутке можно определить непосредственной подстановкой значений $x=x_j$ из каждого промежутка знакопостоянства производной (из области определения функции). Можно находить знак производной *методом интервалов:*
производная раскладывается на множители и при переходе через критическую точку $x=x_j$ обращается внимание на чётность (нечётность) степени множителя $(x-x_i)^{k_j}$ в выражении производной. Если степень k_j чётная, то знак производной при переходе через её критическую точку не изменяется, знак изменяется при нечётной степени .

Разложив производную на множители, получим $y'(x)=\dfrac{2x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$.

Значения производной на самом правом промежутке ($x>2$) положительные, имеют знак “ + “ т.к. $y'(3)=\dfrac{6}{4}>0$.

- При переходе через $x=2$ знак производной изменится на “ – “, т.к. множитель производной $(x–2)$ участвует в нечётной (первой) степени;
- При переходе через $x=1$ знак производной не изменится, т.к. множитель производной $(x–1)$ участвует в чётной (второй) степени;
- При переходе через $x=0$ знак производной изменится на “+“, т.к. множитель производной $(x–0)$ участвует в нечётной (первой) степени.



Вывод: функция возрастает при $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$,
убывает при $x\in(0;1)\cup(1;2)$;

Точки экстремума:

1. x=0 *является* точкой экстремума, причём **максимума**, т.к. в ней функция непрерывна и производная меняет знак с плюса на минус, y (0)=0;
2. x=1 *не является* точкой экстремума, т.к. в ней функция не определена;
3. x=2 *является* точкой экстремума, причём **минимума**, т.к. в ней функция непрерывна и производная меняет знак с минуса на плюс, у (2) = 8;

6) Вторая производная:

$$y''(x)=\left(\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(4x-4)\cdot(x-1)^2-(2x^2-4x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{4\cdot(x-1)\cdot(x-1)-4(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{4}{(x-1)^3}\ .$$

Критические точки второй производной:

а) $y''(x)=0$ не имеет решения ;

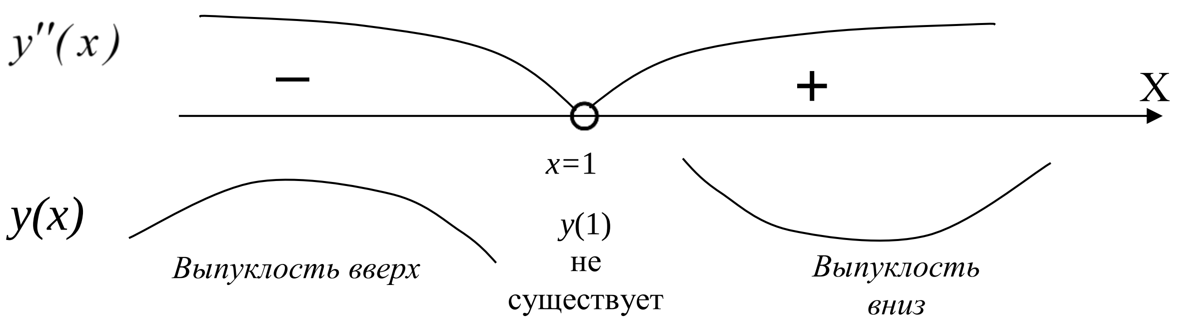
б) $y''(x)$ не существует при $x=1$.

Промежутки выпуклости графика:

Определим знак второй производной на каждом промежутке её знакопостоянства (из области определения функции) :

- Знак $y''(x)$ на самом правом промежутке x>1 "+ " т.к. $y''(2)=4>0$ т.е. на
- При переходе через x=1 знак производной изменится на " – ", т.к. (x – 1) участвует во второй производной в нечётной (третьей) степени т.е

на таком промежутке график функции выпуклый (выпуклый вверх);



Точки перегиба:

а) x=1 *не является* точкой перегиба, т.к. в ней функция не задана и разрывная;

б) Других критических точек второй производной нет.

Точек перегиба нет;

6) Для построения графика функции возьмём несколько вспомогательных точек из области определения функции: y(-3)= -9, y(0,5)= -1, y(4)=10+2/3.

С учётом результатов всех пунктов плана получим график функции, изображенный на рисунке 6.

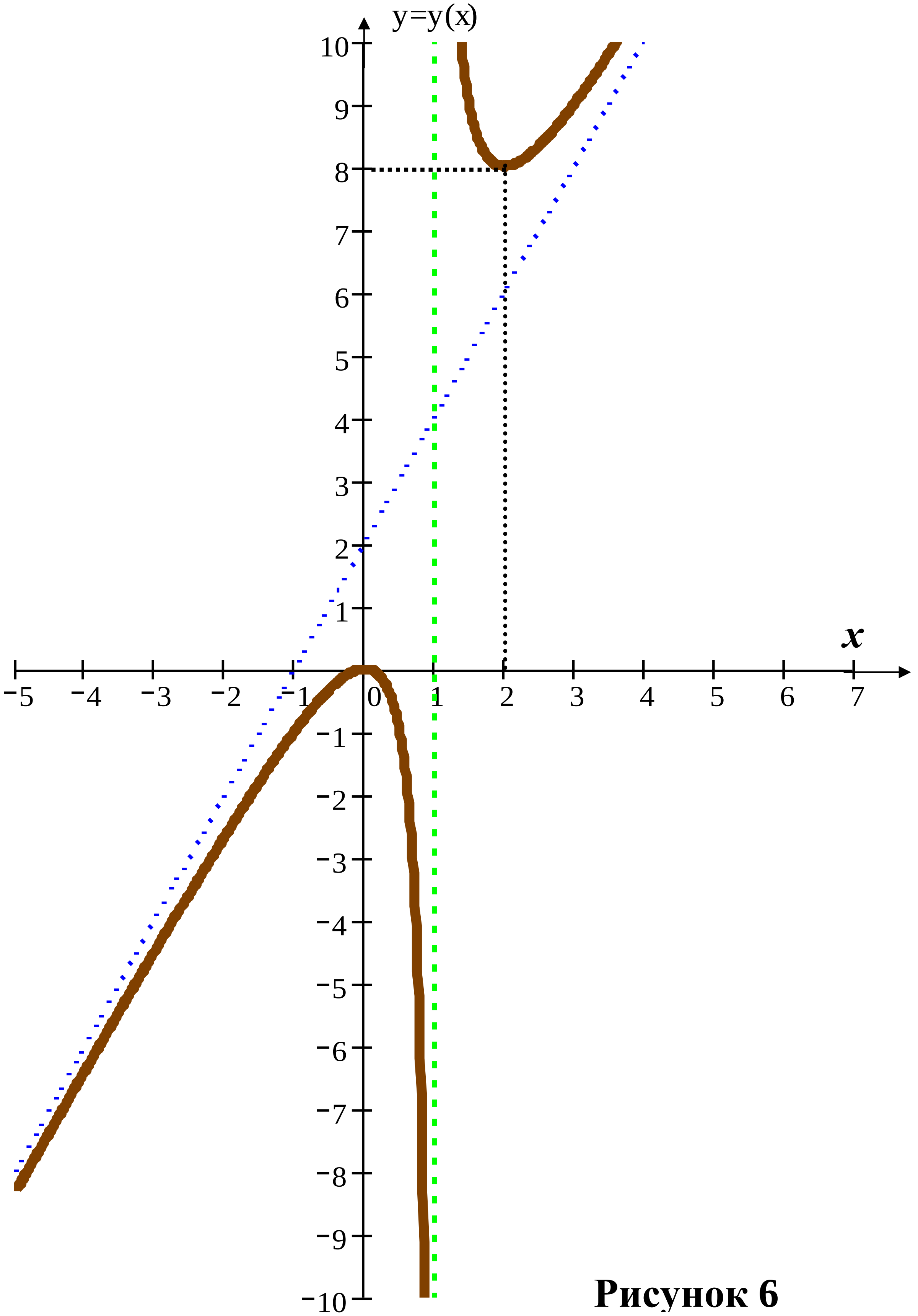


Рисунок 6

№5.(б) Провести полное исследование функции $S(t) = (3-t)\cdot e^{t-2}$ и построить график.

Решение:

1) Область определения и область непрерывности:

Функция определена на всей числовой прямой $D_S = \{\, t \mid t \in \mathbf{R}\}$.

Функция является элементарной т.е. её область непрерывности совпадает с областью определения. Точек разрыва нет;

2) Четность:

$S(-t) = (3+t)\cdot e^{-t-2}$, $S(-t) \neq S(t)$ и $S(-t) \neq -S(t)$,

функция *общего вида*.

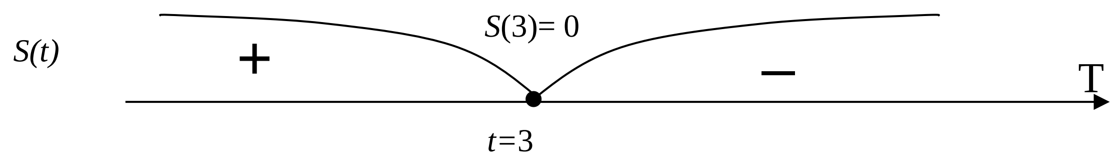
Функция $S(t)$ *не периодическая*;

3) Пересечение с осями:

а) с осью OS: при t=0 $S = (3-0)\cdot e^{0-2} = 3e^{-2} \approx 0{,}4$ и точка пересечения (0; 0,4) ;

б) с осью OT: $(3-t)\cdot e^{t-2} = 0$, его решение t=3 и точка пересечения (3; 0);

Знаки функции



4) Асимптоты графика:

а) Вертикальных асимптот нет. т.к. функция на любом отрезке непрерывна, следовательно, ограниченная;

б) Горизонтальные асимптоты

$$\lim_{t\to-\infty}\bigl(S(t)\bigr) = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{3-t}{e^{2-t}}\right) = \left[\frac{+\infty}{e^{+\infty}}\right] = 0,$$ левая горизонтальная асимптота S=0; (ось OT)

$$\lim_{t\to+\infty}\bigl(S(t)\bigr) = \lim_{t\to+\infty}\left((3-t)\cdot e^{t-2}\right) = -\infty,$$ правой горизонтальной асимптоты нет;

в) Наклонные

Слева (при $t \to -\infty$) не ищем т.к. имеется горизонтальная асимптота.

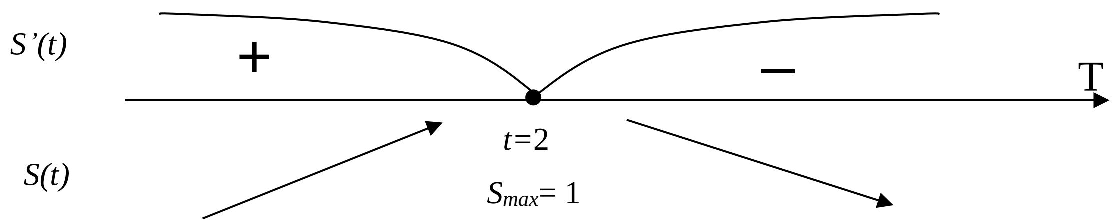
Справа $S=k\cdot t+b$, $$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3-t}{t}\cdot e^{t-2}\right) = -\infty.$$

Наклонных асимптот нет;

5) Производная $S'(t) = -1 \cdot e^{t-2} + (3-t) \cdot e^{t-2} = e^{t-2} \cdot (2-t).$

$S'(t) = 0$ при t=2 и других критических точек производной нет.

Знаки производной:



$S'(0)= e^0 \cdot (2-0) = 2 =1>0$; $S(2)=(3-2) \cdot e^0 = 1$; $S'(3)= e^1 \cdot (2-3) \approx -2{,}71 <0$.

7) Вторая производная:

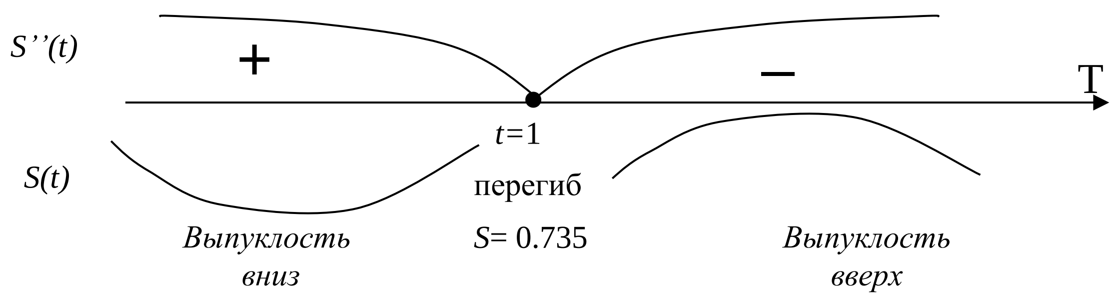
$S''(t) = e^{t-2} \cdot (2-t) + e^{t-2} \cdot (-1) = e^{t-2} \cdot (1-t)$,

а) $S''(t) = 0$ при $1 - t = 0$, $t = 1$;

б) $S''(t)$ существует при любом t ,

(других критических точек второй производной нет).

Знаки второй производной:



$S''(0)= e^{-2} \cdot (1-0) = e^{-2} >0$; $S(1)= (3-1) \cdot e^{1-2} \approx 0{,}735$; $S''(3)= e^1 \cdot (1-3) \approx -5{,}42 <0$.

Точка t=1 является точкой перегиба графика функции;

8) График функции:

Для построения графика функции возьмём несколько вспомогательных точек из области определения функции:

$S(-1) = (3+1) \cdot e^{-3} \approx 0{,}2$,

$S(4) = (3\text{-}4) \cdot e^2 \approx -7{,}4$.

С учётом результатов всех пунктов плана получим график, изображенный на рисунке 7.

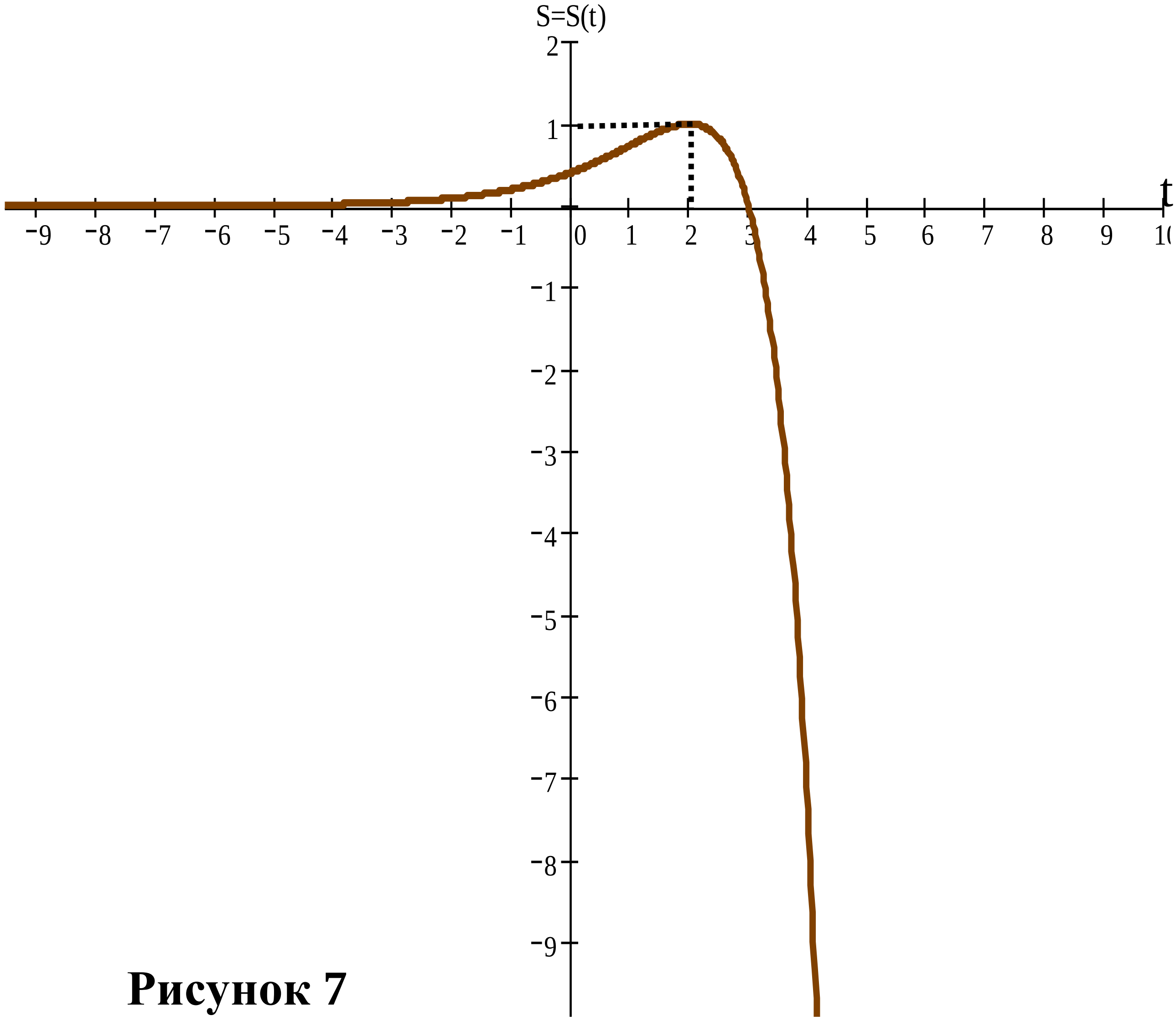


Рисунок 7

Дз-2 часть 2 **Домашняя контрольная работа**
по теме «Интегрирование»
выдаётся на13 неделе, сдача на 18 неделе 2 семестра

№4 (5 баллов) **Вычислить** площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1. $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$.

2. $y = x\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$.

3. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

4. $y = \sin x \cos^2 x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

5. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

6. $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

7. $y = \cos x \sin^2 x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

8. $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.

9. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.

10. $y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$.

11. $y = (x+1)^2$, $y^2 = x + 1$.

12. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.

13. $y = x\sqrt{36 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 6)$.

14. $x = \arccos y$, $x = 0$, $y = 0$.

15. $y = x \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.

16. $y = x^2\sqrt{8 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2})$.

17. $x = \sqrt{e^y - 1}$, $x = 0$, $y = \ln 2$.

18. $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

19. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.

20. $y = \frac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$.

21. $x = (y-2)^3$, $x = 4y - 8$.

22. $y = \cos^5 x \sin 2x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

23. $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.

24. $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$.

25. $x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e^3$.

26. $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.

27. $y = x^2\sqrt{16-x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

28. $x = \sqrt{4-y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

29. $y = (x-1)^2$, $y^2 = x - 1$.

30. $y = x^2 \cos x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

31. $x = 4 - (y-1)^2$, $x = y^2 - 4y + 3$.

№5 (5 баллов) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2$ $(x \geqslant 2)$.

2. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 2$ $(y \geqslant 2)$.

3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 4$ $(0 < x < 8\pi,\ y \geqslant 4)$.

4. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2$ $(x \geqslant 2)$.

5. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$
$y = 3$ $(y \geqslant 3)$.

6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3$ $(0 < x < 4\pi,\ y \geqslant 3)$.

7. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 6\sqrt{3}$ $(x \geqslant 6\sqrt{3})$.

8. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$
$y = \sqrt{3}$ $(y \geqslant \sqrt{3})$.

9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3$ $(0 < x < 6\pi,\ y \geqslant 3)$.

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4$ $(x \geqslant 4)$.

11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 3$ $(y \geqslant 3)$.

12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 9$ $(0 < x < 12\pi,\ y \geqslant 9)$.

13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4$ $(x \geqslant 4)$.

14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4$ $(y \geqslant 4)$.

15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6$ $(0<x<12\pi,\ y\geqslant 6)$.

16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 3\sqrt{3}$ $(x \geqslant 3\sqrt{3})$.

17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2\sqrt{3}$ $(y \geqslant 2\sqrt{3})$.

18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 15$ $(0 < x < 20\pi,\ y \geqslant 15)$.

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1$ $(x \geqslant 1)$.

20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 4$ $(y \geqslant 4)$.

21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$
$y = 1$ $(0 < x < 2\pi,\ y \geqslant 1)$.

22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1$ $(x \geqslant 1)$.

23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2$ $(y \geqslant 2)$.

№6 (5 баллов) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в полярной системе координат

1. $r=4\cos 3\varphi,\ r=2\ (r\geqslant 2)$.
2. $r=\cos 2\varphi$.
3. $r=\sqrt{3}\cos\varphi,\ r=\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.
4. $r=4\sin 3\varphi,\ r=2\ (r\geqslant 2)$.
5. $r=2\cos\varphi,\ r=2\sqrt{3}\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.
6. $r=\sin 3\varphi$.
7. $r=6\sin 3\varphi,\ r=3\ (r\geqslant 3)$.
8. $r=\cos 3\varphi$.
9. $r=\cos\varphi,\ r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)\ (-\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.
10. $r=\sin\varphi,\ r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)\ (0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/4)$.
11. $r=6\cos 3\varphi,\ r=3\ (r\geqslant 3)$.
12. $r=\frac{1}{2}+\sin\varphi$.
13. $r=\cos\varphi,\ r=\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.
14. $r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4),\ r=\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4)\ (\pi/4\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/4)$.
15. $r=\cos\varphi,\ r=2\cos\varphi$.
16. $r=\sin\varphi,\ r=2\sin\varphi$.
17. $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$.
18. $r=\frac{1}{2}+\cos\varphi$.
19. $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.
20. $r=\frac{5}{2}\sin\varphi,\ r=\frac{3}{2}\sin\varphi$.
21. $r=\frac{3}{2}\cos\varphi,\ r=\frac{5}{2}\cos\varphi$.
22. $r=4\cos 4\varphi$.
23. $r=\sin 6\varphi$.
24. $r=2\cos\varphi,\ r=3\cos\varphi$.
25. $r=\cos\varphi+\sin\varphi$.
26. $r=2\sin 4\varphi$.
27. $r=2\cos 6\varphi$.
28. $r=\cos\varphi-\sin\varphi$.
29. $r=3\sin\varphi,\ r=5\sin\varphi$.
30. $r=2\sin\varphi,\ r=4\sin\varphi$.
31. $r=6\sin\varphi,\ r=4\sin\varphi$.

№7 (5 баллов) Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции. В вариантах 1 – 16 ось вращения OX, а в вариантах 17 – 32 ось вращения OY.

1. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.

2. $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$.

3. $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

4. $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \geqslant 0$.

5. $y = \sin^2 x$, $x = \pi/2$, $y = 0$.

6. $x = \sqrt[3]{y-2}$, $x = 1$, $y = 1$.

7. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

8. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$.

9. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

10. $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

11. $y = x^2$, $y^2 - x = 0$.

12. $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

13. $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{y-2}$, $x = 1$.

14. $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$.

15. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

16. $y = \sin\frac{\pi x}{2}$, $y = x^2$.

17. $y = \arccos\frac{x}{3}$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

18. $y = \arcsin\frac{x}{5}$, $y = \arcsin x$, $y = \frac{\pi}{2}$.

19. $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

20. $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

21. $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0{,}5$.

22. $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$.

23. $y = (x-1)^2$, $y = 1$.

24. $y^2 = x - 2$, $y = 0$, $y = x^3$, $y = 1$.

25. $y = x^3$, $y = x^2$.

26. $y = \arccos\frac{x}{5}$, $y = \arccos\frac{x}{3}$, $y = 0$.

27. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

28. $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$.

29. $y = x^3$, $y = x$.

30. $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $x = 0$.

31. $y = (x-1)^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

3 Методика оценки достижений

3.1 Для оценки достижений студента используется

***баллльно-рейтинговая система*:**

- В *каждом семестре* студент должен выполнить домашнюю контрольную работу из двух частей. После её проверки студент получает баллы (рейтинг)

Код	**Вид оценочного средства**	**Максимальный балл**	**Зачтённая работа, баллы**	**Незачёт, баллы**
Дз-2 Часть 1	Домашняя контрольная работа (ДКР)	20	11– 20	0 – 10
Дз-2 Часть 2	ДКР	20	11– 20	0 – 10
Э-2	Экзамен	60	26 – 60	0 – 25

- Допуском до экзамена является 25 баллов при зачтённой *каждой части* контрольной работы. При недопуске студент исправляет ошибки в своей работе либо выполняет дополнительные задания для набора не менее 25 баллов;
- На экзамене в каждом билете имеется по 6 практических задач, каждая оценивается по 10 баллов, на их выполнение даётся 2 часа. Допускается использование дополнительной литературы. Для получения оценок 4 и 5 требуется ответить на несколько теоретических вопросов без применения литературы;
- При наборе на экзамене менее 26 баллов экзамен является несданным и выставляется неудовлетворительная оценка (независимо от набранных в семестре баллов);
- Оценкой за семестр является общий суммарный рейтинг в виде суммы баллов, накопленных за семестр, и полученных на экзамене. Оценка выставляется при наборе не менее 60 баллов с указанием этой суммы и соответствующей оценки.

<table>
<tr><th>Оценка по 5 бальной шкале</th><th>Зачет</th><th>Сумма баллов по дисциплине</th><th>Оценка (ECTS)</th><th>Градация</th></tr>
<tr><td>5 (отлично)</td><td rowspan="6">Зачтено</td><td>90-100</td><td>A</td><td>Отлично</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4 (хорошо)</td><td>85-89</td><td>B</td><td>Очень хорошо</td></tr>
<tr><td>75-84</td><td>C</td><td>Хорошо</td></tr>
<tr><td>70-74</td><td rowspan="2">D</td><td rowspan="2">Удовлетворительно</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 (удовлетворительно)</td><td>65-69</td></tr>
<tr><td>60-64</td><td>E</td><td>Посредственно</td></tr>
<tr><td>2 (неудовлетворительно)</td><td>Не зачтено</td><td>Ниже 60</td><td>F</td><td>Неудовлетворительно</td></tr>
</table>

3.2 Вопросы экзамена

1. Определение числовой последовательности и ее предела. Свойства пределов последовательности.
2. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимообратных функций. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.
3. Преобразования, влияющие на график функции ($f(x)+c$, $f(x+c)$, $c\cdot f(x)$, $f(c\cdot x)$, $|f(x)|$, $f(|x-c|)$). Графики линейной, параболической, дробно-линейной функции и $y=A\cdot\sin(w\cdot x+w_0)$.
4. Определение предела функции в точке. Бесконечный предел и предел на бесконечности. Свойства пределов.
5. Бесконечно малая функция (БМ). Сравнение БМ: эквивалентность, символ "о". Первый замечательный предел, его применение. Основные эквивалентности БМ в пределах.
6. Бесконечно большая функция (ББ). Сравнение ББ: эквивалентность, символ "о". Шкала ББ при $x\to\infty$, её применение.
7. Связь БМ, ББ и других функций. Основные виды неопределенностей в пределах, способы их раскрытия. Второй замечательный предел, правило его применения.
8. Непрерывность функции в точке. Частичные пределы, их связь с непрерывностью. Точки разрыва функции, их классификация.
9. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства непрерывных в точке функций.
10. Свойства непрерывных на отрезке функций: сохранение знака, ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, поиск корня $f(x)=0$ методом половинного деления, промежуточные значения.

11. Производная функции $f(x)$: определение, геометрический смысл с уравнением касательной и нормали, физический смысл. Свойства производных.
12. Производные основных функций (x^n, a^n, $ln(x)$, $sin(x)$, $cos(x)$) с доказательствами.
13. Приращение дифференцируемой функции, понятие дифференциала и его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы дифференциала, его применение в приближенных вычислениях.
14. Производная обратной функции. Вывести производные *arcsin(x), arctg(x).* Производная неявно заданной функции.
15. Логарифмическое дифференцирование. Понятие гиперболических функций, их производные.
16. Свойства дифференцируемых на отрезке функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
17. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, её коэффициенты и остаточный член в формах Пеано и Лагранжа.

18. вывести разложения sin(x), cos(x), e^x, ln(1+x), $(1+x)^n$ по формуле Маклорена.
19. Производные $y_x'(x)$, $y_{xx}''(x)$ для функции, заданной параметрически.
20. Определение точки экстремума. Связь монотонности функции и знака ее производной. Теорема Ферма (необходимое условие точек экстремума).
    Достаточные условия экстремума:
    a) с помощью знака первой производной;
    b) с помощью производных старших порядков.
21. Алгоритм нахождения точек экстремума. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, примеры задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.
22. Определение выпуклой (вогнутой) НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ. Связь выпуклости со знаком второй производной. Алгоритм нахождения точек перегиба.
23. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределах.
24. Понятие асимптоты графика функций, их виды и способы нахождения.
25. Общий план исследования функций и построения графика функции.
26. Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на ОТРЕЗКЕ.
27. Решение текстовых задач на оптимизацию.

28. Определение первообразной для $f(x)$ на [a; b], теорема о двух первообразных. Неопределенный интеграл (НИ), его свойства. Таблица основных интегралов.
29. Определенный интеграл (ОИ) для $f(x)$, как предел интегральных сумм, его основные свойства, теорема о среднем.
30. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной.
31. Формула Ньютона-Лейбница и её применение.
32. Замена переменной в НИ и ОИ.Интегрирование по частям в НИ, ОИ, основные случаи.
33. Вычисление некоторых НИ методом неопределенных коэффициентов.
34. Дробно-рациональная функция, алгоритм ее разложения на сумму элементарных дробей:
    а) выделение целой части, алгоритм "деление столбиком";
    б) разложение многочлена на неприводимые множители, кратность корня;
    в) метод неопределенных коэффициентов разложения на элементарные дроби.
35. Интегралы от элементарных дробей. Общий план интегрирования дробно-рациональных функций.
36. Интегралы от тригонометрических функций; Основные случаи и способы интегрирования данных интегралов.
37. Интегралы от иррациональных функций. Примеры "неберущихся" интегралов.

38. Нахождение площади криволинейной трапеции и площадей плоских фигур с помощью ОИ (ограниченных $y_i=f_i(x)$; параметрических заданными).
39. Площадь криволинейного сектора. Нахождение площади фигуры в полярных координатах.
40. Объем тела по поперечным сечениям. Объем тела вращения с помощью ОИ.

3.3 ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Новоуральский технологический институт

Кафедра высшей математики

Направление подготовки – 15.03.05 - "Конструкторско- технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Профиль – «Технология машиностроения» (**КМ-15з**)

Квалификация (степень) выпускника – академический бакалавр

Форма обучения – Заочная

Дисциплина – **МАТЕМАТИКА, 2 СЕМЕСТР**

Экзаменационный билет №1

1) Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cdot \sin^2(3x)}{\arcsin(2x)\cdot(1-\cos(x))}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+7}\right)^{5x^2-x}$.

2) Найти производные функций

а) $S(p)=p^2\cdot e^{3p-1}$; б) $x(y)=\dfrac{y^3}{3y-12}+\ln(3+\sqrt{2})$;

3) Исследовать на асимптоты график функции $f(x)=\dfrac{x\cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{x^2-9}$;

4) Найти $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2+4x-12}\,dx$;

5) Вычислить площадь, ограниченную кривой $\rho(\varphi)=4\sin^2(\phi)$.

Составил: ______________________________ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: ________________________________Носырев Н.А.

05.06.2016
Новоуральск

4 Справочник

- Если $\alpha = \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ (бесконечно малая функция, БМ),

  $\beta = \beta(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ (БМ),

  $\varphi = \varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$ (бесконечно большая функция, ББ),

  $\psi = \psi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$ (ББ),

  $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A \neq 0$,

то

1) При сравнении бесконечно малых вычисляется предел их частного и, в зависимости от результата

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{cases} 1 \quad \text{, тогда } \alpha \text{ и } \beta \text{ эквивалентны } \alpha \underset{x \to x_0}{\sim} \beta \\ C \neq 0, \text{ тогда } \alpha \text{ и } \beta \text{ имеют один порядок малости } \alpha \underset{x \to x_0}{\sim} C \cdot \beta \\ 0 \text{ , тогда числитель имеет больший порядок малости } \alpha = o(\beta) \\ \infty \text{ , тогда знаменатель имеет больший порядок малости } \beta = o(\alpha) \end{cases}$$

- При сравнении бесконечно больших вычисляется предел их частного и, в зависимости от результата

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \begin{cases} 1 \quad \text{, тогда } \varphi \text{ и } \psi \text{ эквивалентны } \varphi \underset{x \to x_0}{\sim} \psi \\ C \neq 0, \text{ тогда } \varphi \text{ и } \psi \text{ имеют один порядок роста } \varphi \underset{x \to x_0}{\sim} C \cdot \psi \\ 0 \text{ , тогда знаменатель имеет больший порядок роста } \psi = O(\varphi) \\ \infty \text{ , тогда числитель имеет больший порядок роста } \varphi = O(\psi) \end{cases}.$$

- При арифметических действиях без неопределённости

- $c\cdot\alpha \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ *с тем же* порядкоммалости)
- $\alpha \pm \beta \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ *с наименьшим* из порядков малости слагаемых)
- $\alpha\cdot\beta \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ с порядком малости *выше,* чем у каждого из сомножителей)
- $c\cdot\varphi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ с тем же порядком роста)
- $\varphi \pm \psi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ с наибольшим из порядков роста слагаемых)
- $\varphi\cdot\psi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ с порядком роста выше, чем у каждого из сомножителей)
- $\dfrac{1}{\alpha} \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ)
- $\dfrac{1}{\varphi} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ)
- $\alpha \pm \varphi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ)
- $f(x)\pm\alpha \xrightarrow[x\to x_0]{} A$
- $f(x)\cdot\alpha \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ)
- $f(x)\pm\varphi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ)
- $f(x)\cdot\varphi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ)

  - Виды неопределённостей в пределах:

- $\dfrac{\alpha}{\beta}$ $\left[\dfrac{o}{o}\right]$;
- $\dfrac{\varphi}{\psi}$ $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$;
- $\alpha\cdot\varphi$ $[o\cdot\infty]$;
- $\varphi-\psi$ $[\infty-\infty]$; при одинаковом порядке роста
- $(1+\alpha)^{\varphi}$ $\left[1^{\infty}\right]$. с помощью 2[го] замечательного предела

- **Основные эквивалентности в пределах:**

$$\sin(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \arcsin(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} tg(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} arctg(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \alpha,$$

$$1-\cos(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \frac{\alpha^2}{2}, \quad \ln(1+\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \alpha, \quad \log_a(1+\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \frac{1}{\ln(a)}\cdot\alpha,$$

$$\left(e^{\alpha}-1\right) \underset{\alpha\to o}{\sim} \alpha, \quad \left((1+\alpha)^m-1\right) \underset{\alpha\to o}{\sim} m\cdot\alpha.$$

Если бесконечно малую (бесконечно большую) функцию в выражении заменить на эквивалентную, то предел выражения *не изменится.*

- **Шкала бесконечно больших функций:**

при $x \to +\infty$

• $log_a(x)$ (a>1)	….. $lg(x)$ $ln(x)$ $log_2(x)$ ……
• x^n	…. $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt{x}$ x x^2 x^3 ….
• a^x (a>1)	…. 2^x e^x 10^x ….
• $n!$ ($x!$ при $x \in \mathbf{N}$)	
• x^x x>1 • x^{x^2} x>1 …………..	

Стоящие ниже функции имеют **больший** порядок роста.
Среди основных элементарных функций наименьший порядок роста имеет логарифмическая функция (с ростом её основания порядок роста уменьшается) и наибольший порядок роста имеет показательная функция (с ростом её основания порядок роста возрастает).

- **Виды точек разрыва:**

- $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow x = x_0$ – точка непрерывности для $f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0) \Rightarrow x = x_0$ – точка разрыва для $f(x)$ *нулевого* рода (восполнимый разрыв);
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \mathrm{A} \text{ (конечное)} \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \mathrm{B} \text{ (конечное)} \end{array}\right\} \mathrm{A} \neq \mathrm{B} \Rightarrow x = x_0$ – точка разрыва для $f(x)$ *первого* рода (конечный скачок);
- Если хотя бы один из частичных пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ бесконечен, то $x = x_0$ – точка разрыва *второго* рода (существенный разрыв).

- Производная функции в точке x_o
$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_o}=f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{\Delta x\to o}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right);$$
- Геометрически $y'(x_o)$ равна угловому коэффициенту касательной в соответствующей точке графика, в декартовых координатах $y'(x_o)=tg(\alpha)$, α – угол наклона касательной к графику функции в точке $(x_o;\ y(x_o))$;
- Уравнение касательной $y-y_o=y'(x_o)\cdot(x-x_o)$;
- Уравнение нормали $y-yo=\dfrac{-1}{y'(x_o)}\cdot(x-x_o)$;
- Производная произведения $(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$**;**
- Производная дроби $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$**;**
- Логарифмическая производная $\left((u(x))^{v(x)}\right)'=u^{v}\cdot\left(v'\cdot ln(u)+v\cdot\dfrac{u'}{u}\right)$,
$$f'(x)=f(x)\cdot(\ ln(f(x)\ )';$$
- Дифференциал функции $\left.df\right|_{x=x_o}=f'(x_o)\cdot(x-x_o)=f'(x_o)\cdot dx$;
- Дифференциал второго порядка $\left.d^2f\right|_{x=x_o}=f''(x_o)\cdot(dx)^2$;
- Для функции, заданной параметрически $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

производная y по x $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=t_o}=\dfrac{y'(t_o)}{x'(t_o)}$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=t_o}=\left.\left(\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)'\cdot\dfrac{1}{x'(t)}\right)\right|_{t=t_o}$;

- Формула Тейлора $\Delta f(x)\approx\dfrac{df}{1!}+\dfrac{d^2f}{2!}+....+\dfrac{d^nf}{n!}$,

$$f(x)\approx\underbrace{f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1!}\cdot(x-x_o)}_{\text{первое приближение}}+\frac{f''(x_o)}{2!}\cdot(x-x_o)^2+\ ....+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\cdot(x-x_o)^n;$$

- **Таблица производных**

Функции	Производные
• $(f(x))^n$	$n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
• $a^{f(x)}$	$a^{f(x)}\cdot ln(a)\cdot f'(x)$
$e^{u(x)}$	$e^{u(x)}\cdot u'(x)$
e^{x^2}	$e^{x^2}\cdot 2x$
2^x	$2^x\cdot ln(2)$
• $log_a(f(x))$	$\frac{1}{f(x)\cdot ln(a)}\cdot f'(x)$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$lg(x)$	$\frac{1}{x\cdot ln(10)}$
$sin(f(x))$	$cos(f(x))\cdot f'(x)$
$cos(f(x))$	$-sin(f(x))\cdot f'(x)$
$tg(f(x))$	$\frac{1}{cos^2(f(x))}\cdot f'(x)$
$ctg(f(x))$	$\frac{-1}{sin^2(f(x))}\cdot f'(x)$
$arcsin(f(x))$	$\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\cdot f'(x)$
$arccos(f(x))$	$\frac{-1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\cdot f'(x)$
$arctg(f(x))$	$\frac{1}{1+(f(x))^2}\cdot f'(x)$
$arctg(f(x))$	$\frac{-1}{1+(f(x))^2}\cdot f'(x)$

- Функция F(x) является первообразной для $f(x)$ если $F'(x) = f(x)$;
- Если $F'(x) = f(x)$ то $\int f(x)dx = F(x) + C$;
- Таблица основных интегралов

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$	Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
x^n, $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	1	x
		$a \cdot g(x) \cdot g'(x)$	$a \cdot \frac{g^2(x)}{2}$
		$(ax+b)^k$	$\frac{(ax+b)^{k+1}}{a \cdot (k+1)}$
		$\frac{g'(x)}{\sqrt{a+g(x)}}$	$2 \cdot \sqrt{a+g(x)}$
$a^{b \cdot x}$	$\frac{a^{b \cdot x}}{b \cdot ln(a)}$	$e^{b \cdot x}$	$\frac{e^{b \cdot x}}{b}$
		$2^{b \cdot x}$	$\frac{2^{b \cdot x}}{b \cdot \ln(2)}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} ln(ax+b)$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$ln(g(x))$
		$\frac{x+b}{(x+b)^2 + a^2}$	$\frac{1}{2} \ln((x+b)^2 + a^2)$
$\cos(b \cdot x)$	$\frac{sin(b \cdot x)}{b}$	$\cos^k(b \cdot x) \cdot \sin(bx)$	$\frac{-\cos^{k+1}(b \cdot x)}{b \cdot (k+1)}$
$sin(b \cdot x)$	$\frac{-\cos(b \cdot x)}{b}$	$\sin^k(bx) \cdot \cos(b \cdot x)$	$\frac{sin^{k+1}(b \cdot x)}{b \cdot (k+1)}$
$\frac{1}{cos^2(b \cdot x)}$	$\frac{1}{b} tg(bx)$	$\frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$	$tg(g(x))$

$\dfrac{1}{sin^2(b\cdot x)}$	$-\dfrac{1}{b}ctg(bx)$	$\dfrac{g'(x)}{\sin^2\left(g(x)\right)}$	$-ctg\left(g(x)\right)$
$tg(a\cdot x)$	$-\dfrac{1}{a}\cdot ln\,\lvert cos(a\cdot \mathrm{x})\rvert$	$ctg(a\cdot x)$	$\dfrac{1}{a}\cdot \ln\lvert \sin(a\cdot \mathrm{x})\rvert$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}arctg\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\dfrac{1}{(x+b)^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}arctg\left(\dfrac{x+b}{a}\right)$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}ln\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)$	$\dfrac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2\cdot a}ln\left(\dfrac{g(x)-a}{g(x)+a}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\dfrac{g'(x)}{\sqrt{a^2-g^2(x)}}$	$arcsin\left(\dfrac{g(x)}{a}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$	$\dfrac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x)\pm k}}$	$ln\left(g(x)+\sqrt{g^2(x)\pm k}\right)$
$sh(ax)$	$\dfrac{1}{a}ch(ax)$	$sh\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$	$\dfrac{1}{a}ch\left(u(x)\right)$
$ch(ax)$	$\dfrac{1}{a}sh(ax)$	$ch\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$	$\dfrac{1}{a}sh\left(u(x)\right)$
$\dfrac{1}{sh^2(ax)}$	$-\dfrac{1}{a}cth(ax)$	$\dfrac{g'(x)}{sh^2(g(x))}$	$-\dfrac{1}{a}cth(g(x))$
$\dfrac{1}{ch^2(ax)}$	$\dfrac{1}{a}th(ax)$	$\dfrac{g'(x)}{ch^2(g(x))}$	$\dfrac{1}{a}th(g(x))$

- Определённый интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$;
- Замена переменной а)

$$\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)dx = \begin{bmatrix} \text{çàì åí à} \\ t=u(x) \end{bmatrix} = \int f(t)\cdot dt = F(t)+c = F\left(u(x)\right)+c\,;$$

б) $$\int_a^b f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)dx = \begin{bmatrix} \text{çàì åí à} \\ t=u(x) \\ x_1=a \Rightarrow t_1=u(x_1) \\ x_2=b \Rightarrow t_2=u(x_2) \end{bmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = F(t)\Big|_{t_1}^{t_2}\,;$$

- Интегрирование по частям

$$a)\quad \int u(x)\cdot v'(x)\cdot dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\cdot dx$$

$$\text{ò.å.}\quad \int u dv = u\cdot v - \int v\cdot du;$$

$$\acute{a})\quad \int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = \Big(u(x)\cdot v(x)\Big)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)dx$$

$$\text{ò.å.}\quad \int\limits_a^b u\cdot dv = \Big(u\cdot v\Big)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\cdot du\ ;$$

- Разложение на элементарные дроби

а) $\dfrac{2x^4-4x^3+14x^2-17x+9}{(x-1)(x^2+4)}$ неправильная дробь,

выделение целой части и правильной дроби:

$$(x-1)(x^2+4) = x^3 - x^2 + 4x - 4,$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + 8x^2 - 9x - 15 & \underline{x^3 - x^2 + 4x - 4} \longleftarrow \textit{делитель} \\
\underline{2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x} & 2x \quad + 1 \longleftarrow \textit{частное} \\
\quad x^3 \quad - x \quad -15 & \\
\quad \underline{x^3 - x^2 + 4x \quad -4} & \\
\qquad x^2 - 5x - 11 \longleftarrow \textit{остаток} &
\end{array}$$

$$2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 17x + 9 = (2x+1)\cdot\left(x^3 - x^2 + 4x - 4\right) + x^2 - 5x - 11$$

,

$$\frac{2x^4-4x^3+14x^2-17x+9}{(x-1)(x^2+4)} = 2x + 1 + \frac{x^2-5x-11}{(x-1)(x^2+4)};$$

б) $\dfrac{x^2-5x-11}{(x-1)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B\cdot x + C}{x^2+4},$

$$\frac{x^2-5x-11}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A\cdot\left(x^2+4\right)+(x-1)\cdot(B\cdot x+C)}{(x-1)(x^2+4)},$$

$$A\cdot\left(x^2+4\right)+(x-1)\cdot(B\cdot x+C)=x^2-5x-11$$

$$Ax^2+4A+Bx^2+Cx-Bx-C=x^2-5x-11,$$

$$(A+B)x^2+(C-B)x+(4A-C)=1\cdot x^2+(-5)\cdot x+(-11)$$

$$\begin{cases}A+B=1\\ C-B=-5\\ 4A-C=-11\end{cases},\quad A=3,\ B=4,\ C=-1$$

$$\frac{x^2-5x-11}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{4\cdot x-1}{x^2+4},$$

$$\frac{2x^4-4x^3+14x^2-17x+9}{(x-1)(x^2+4)}=2x+1+\frac{-3}{x-1}+\frac{4\cdot x-1}{x^2+4};$$

- Примеры разложений правильной дроби (дробно-рациональной функции) на сумму элементарных дробей

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x+2)(x-5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{D}{x-5},$$

$$\frac{2x^2+x+7}{(x-1)^3\cdot(x+2)^2}=\left(\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}\right)+\left(\frac{A_4}{x+2}+\frac{A_5}{(x+2)^2}\right),$$

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(\underbrace{x^2+x+10}_{D<0})}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\cdot x+C}{x^2+x+10},$$

число коэффициентов каждый раз равно порядку многочлена в исходном знаменателе;

- Интегралы от элементарных дробей:

1) $\int\frac{3}{x-5}dx=ln(|x-5|)+c$;

2) $\int\frac{7}{(x-5)^3}dx=\frac{-7}{2(x-5)^2}+c$;

3) $\int \frac{5}{x^2+7^2}dx = \frac{5}{7}arctg\left(\frac{x}{7}\right)+c$;

4) $\int \frac{3x+7}{x^2+2x+6}dx = \int \frac{3x+7}{\left(x^2+2x+1\right)-1+6}dx = \int \frac{3x+7}{\left(x+1\right)^2+5}dx =$

$$= \begin{bmatrix} \text{замена} \\ t = x+1, \\ x = t-1, \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{3\left(t-1\right)+7}{t^2+5}dt = \int \frac{3t+4}{t^2+5}dt =$$

$$= \int \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+5} + \frac{4}{t^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} \right)dt = \frac{3}{2}ln\,|\,t^2+5\,| + \frac{4}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)+c =$$

$$= \frac{3}{2}ln\,|\,x^2+2x+6\,| + \frac{4}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)+c;$$

5) Интеграл вида $J_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$ при $n \in$ □ находится по формуле

$$J_n = \frac{1}{2a^2\cdot(n-1)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot \boldsymbol{J_{n-1}}\ ;$$

- Интегрирование тригонометрических функций

Пусть $R\left(u,v\right)$-рациональное выражение от u,v.

Тогда

а) $\int R\left(cos(x), sin(x)\right)dx$ находится с помощью универсальной подстановки

$$t = tg\left(\frac{x}{2}\right),\ sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\cdot dt,$$

получим интеграл от дробно-рациональной функции;

б) $\int R\left(cos^2(x), sin^2(x)\right)dx$ или при чётности подынтегральной функции относительно синуса и косинуса находится с помощью подстановки

$$t = tg\left(x\right),\ sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{1}{1+t^2}\cdot dt;$$

в) $\int sin^m(x)\cdot cos^n(x)dx$

в.1) $m = 1,\ n -$ любое$\Rightarrow$ замена $t = cos(x),\ sin(x)dx = -dt$;

в.2) $n = 1,\ m -$ любое$\Rightarrow$ замена $t = sin(x),\ cos(x)dx = dt$;

в.3) m-нечётное положительное, $n -$ любое$\Rightarrow$ замена $t = cos(x),$

$$sin^5(x)\cdot cos^n(x)dx = sin^4(x)\cdot cos^n(x)\cdot sin(x)dx =$$

$$= \left(1 - cos^2(x)\right)^2\cdot cos^n(x)\cdot sin(x)dx = \left(1-t^2\right)^2\cdot t^n\cdot\left(-dt\right);$$

n-нечётное положительное, $m -$ любое$\Rightarrow$ замена $t = sin(x),$

$$cos^7(x)\cdot sin^n(x)dx = cos^6(x)\cdot sin^n(x)\cdot cos(x)dx =$$

$$= \left(1 - sin^2(x)\right)^3\cdot sin^n(x)\cdot cos(x)dx = \left(1-t^2\right)^3\cdot t^n\cdot dt;$$

в.5) $n, m -$ чётные положительные числа, тогда каждую степень понижают вдвое по формулам

$$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2},\quad sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2},$$

$$sin(x)\cdot cos(x) = \frac{1}{2}sin(2x);$$

г) При интегрировании произведения тригонометрических функций используются формулы

$$sin(\alpha)\cdot cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(sin\left(\alpha+\beta\right) + sin(\alpha-\beta)\right),$$

$$cos(\alpha)\cdot cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(cos\left(\alpha+\beta\right) + cos(\alpha-\beta)\right),$$

$$sin(\alpha)\cdot sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(cos\left(\alpha-\beta\right) - cos(\alpha+\beta)\right);$$

- Площадь фигуры в декартовых координатах:

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, прямыми $x = a$ слева, $x = b$ справа, и графиком функции $y = f(x)$ при условии $\forall x \in [a;\, b]\quad f(x) \geq 0\qquad S_{\text{êðèâ.ò ðàï}} = \int\limits_a^b f(x)dx;$

Если $\forall x \in [a;b] \quad f(x) \le 0$, то $S_{\text{êðèâ.ò ðàï}} = -\int\limits_a^b f(x)dx$;

б) Площадь между графиком $x = x(y)$ и осью OY

$$S_{\text{êðèâ.ò ðàï}} = \int\limits_{y_1}^{y_2} x(y)dy$$

в) Если фигура ограничена в декартовых координатах графиком функции $y = f_1(x)$ снизу, графиком $y = f_2(x)$ сверху, вертикальными прямыми $x = a$ слева и $x = b$ справа, то

$$S_{\text{ô èã.}} = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx;$$

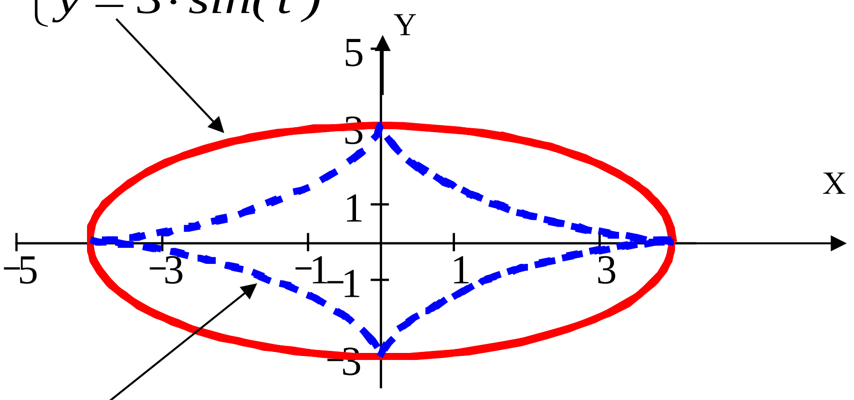
- Площадь между параметрически заданной линией $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

  при $t_1 \le t \le t_2$ и осями декартовой системы координат:

  г.1) С осью OX $\qquad S_x = \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt \right|$;

  г.2) С осью OY $\qquad S_y = \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y'(t)dt \right|$;

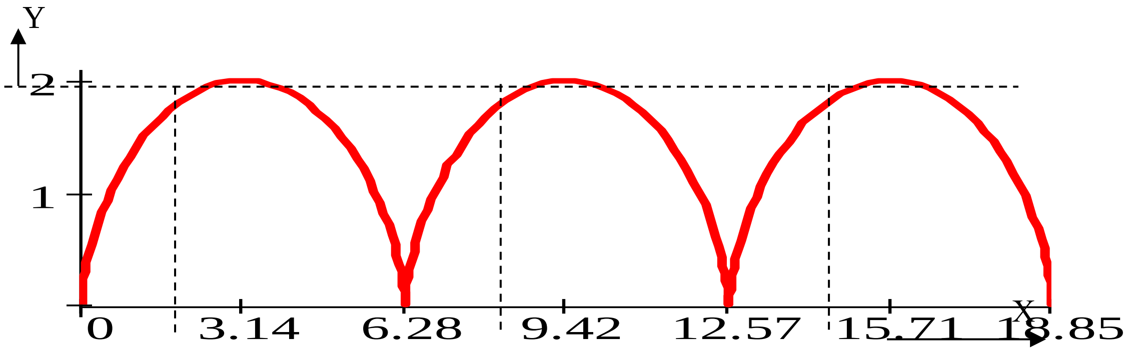
- Линия $\begin{cases} x = 4 \cdot cos(t) \\ y = 3 \cdot sin(t) \end{cases}$ является эллипсом с полуосями 4 и 3.



- $\begin{cases} x = 4 \cdot cos^3(t) \\ y = 3 \cdot sin^3(t) \end{cases}$;

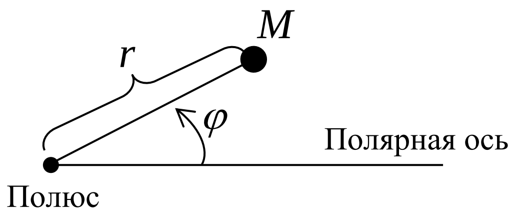
- Циклоида $\begin{cases} x = a\left(t - \sin(t)\right) \\ y = a\left(1 - \cos(t)\right) \end{cases}$ (заданная параметрически)

При $a=1$

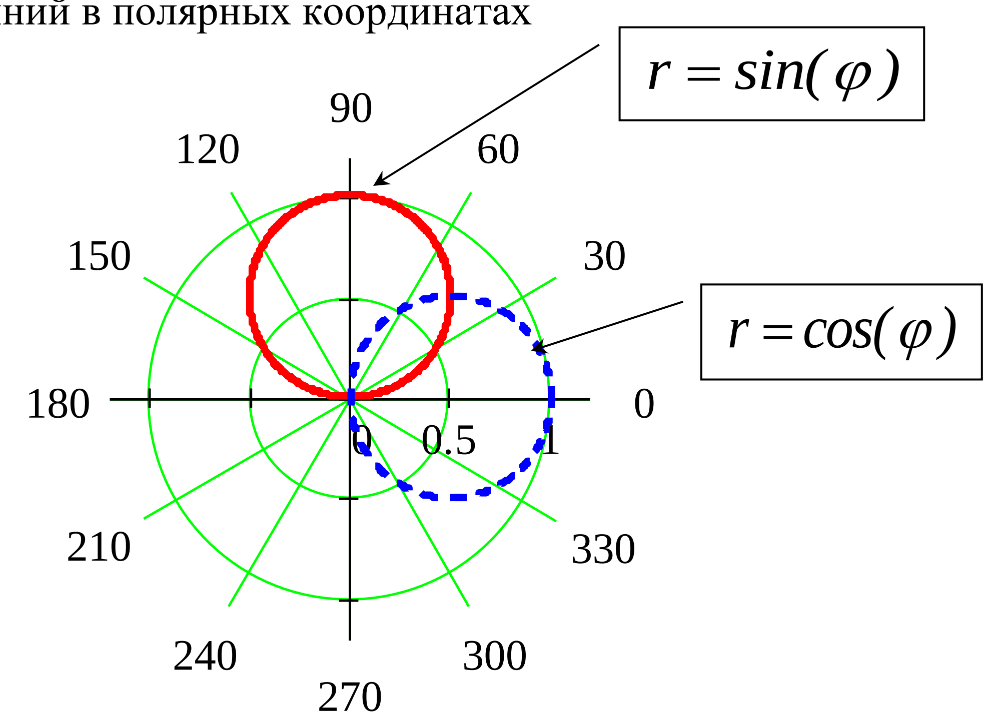


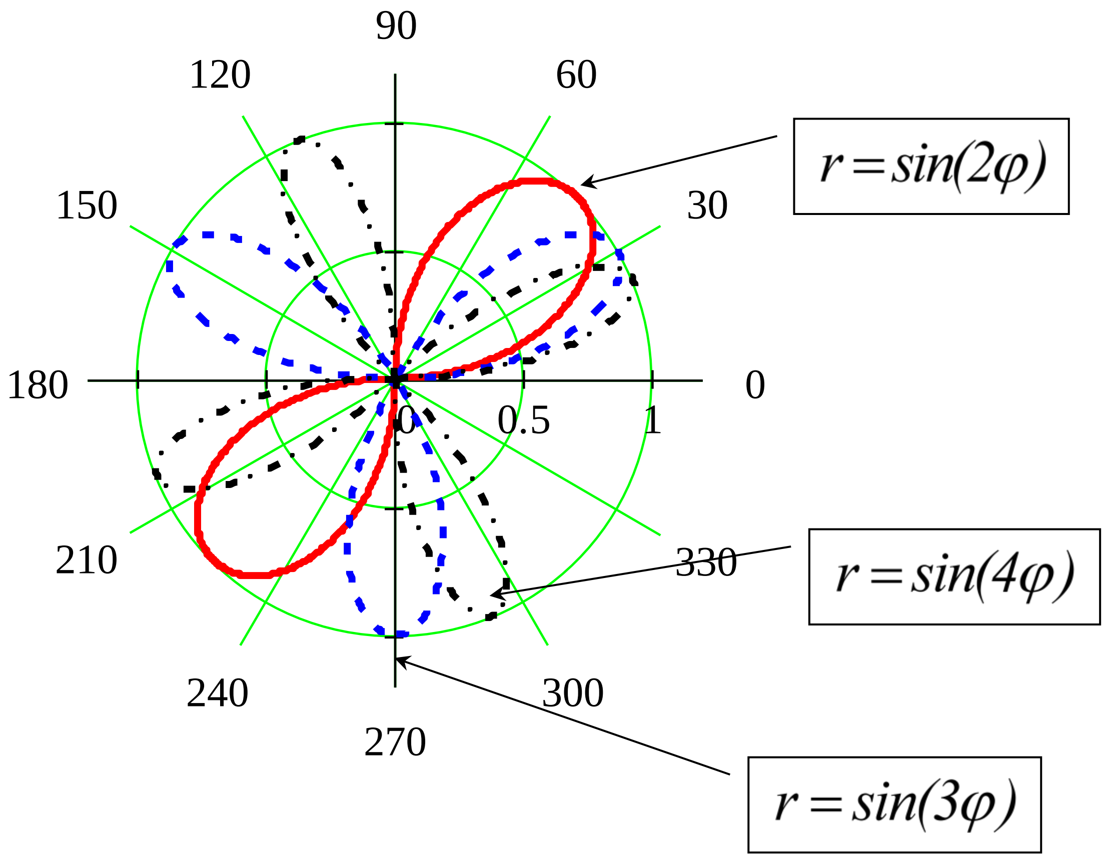
- Линии в полярных координатах (r; φ)

φ-угол поворота от полярной оси (оси ОХ) против часовой стрелки,
r -расстояние до полюса (начала координат).



Примеры линий в полярных координатах





- Площадь в полярных координатах:

  Если фигура ограничена исходящими из полюса лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и линией $r=r(\varphi)$, то площадь такого криволинейного сектора $S=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{(r(\varphi))^2}{2}d\varphi$;

  Если фигура ограничена исходящими из полюса лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и линиями $r=r_1(\varphi)$ ближе к полюсу, $r=r_2(\varphi)$ дальше от полюса, то площадь такой фигуры $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left((r_2(\varphi))^2-(r_1(\varphi))^2\right)d\varphi$;

- Объём тела

  Если для любой проекции $x\in[a;b]$ тела на ось OX известна площадь поперечного сечения $S(x)$ такого тела,

  то его объём тела $V=\int\limits_a^b S(x)dx$;

- Если в плоскости XOY задана линия $y = f(x)$ и при $x \in [a; b]$ она вращается вокруг оси OX, то объём тела вращения

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx;$$

- Если в плоскости XOY задана линия $x = g(y)$ и при $y \in [y_1; y_2]$ она вращается вокруг оси OY, то объём тела вращения

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left(g(y) \right)^2 dy.$$

Каждый студент выполняет по одному заданию из семи задач, вариант – его номер в списке группы. При решении использовать конспект лекций, литературу из списка, справочник формул.

№1(6 баллов)Для каждого дифференциального уравнения

а) Определить его вид;

б) Найти общее решение (общий интеграл);

в) При указанных начальных условиях решить задачу Коши

Вариант №1

1) $x \cdot y' - 2y = 1$, $y(1)=1$;

2) $(p^2+1)\cdot\sqrt{s}\cdot ds + p\cdot s\cdot dp = 0$;

3) $(x-y)\cdot dx + (2y-x)\cdot dy = 0$, $y=1$ при $x=1$;

Вариант №2

1) $(x-y)\cdot dx + (y+x)\cdot dy = 0$, $y=1$ при $x=1$;

2) $2q\cdot(p+1)\cdot dq + p\cdot\sqrt{q}\cdot dp = 0$, $p=1$ при $q=4$;

3) $x\cdot y' - 4y = x^3$

Вариант №3

1) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2$, $y(1)=1$;

2) $cos(t)\cdot\sqrt{s}\cdot ds + sin(t)\cdot s\cdot dt = 0$

3) $y' = \dfrac{y}{x} - 2\,sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $y=1$ при $x=1$;

Вариант №4

1) $x\cdot y' - 2y = x^3$, $y(1)=1$;

2) $(p^2+p)\cdot s\cdot ds + p\cdot s^3\cdot dp = 0$, $p=1$ при $s=4$;

3) $(x^2+2y^2)\cdot dx + 4x\cdot y\cdot dy = 0$;

Вариант №5

1) $y' - \dfrac{y}{x^2-1} = x-1$, $y(0)=1$;

2) $\sqrt[3]{cos(h)}\cdot e^t\cdot dh - \dfrac{t}{sin(h)}\cdot dt = 0$

3) $y' = 4\,cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}$, $y=1$ при $x=1$;

Вариант №6

1) $(t-y)\cdot dt - (y+t)\cdot dy = 0$, $t=1$ при$y=4$;

2) $x\cdot y' + 3y = x^5$, $y(1)=1$;

3) $2q\cdot(p+1)\cdot dq + p\cdot\sqrt{q}\cdot dp = 0$

Вариант №7

1) $y' = \dfrac{y}{x} - \sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$, $y=1$ при $x=1$;

2) $\frac{u}{p}\cdot du+\ p^2\cdot sin^2(u^2)\cdot dp=0$, p=1 при$u=\frac{\pi}{4}$;

3) $y'+y=e^x$.

Вариант №8

1) $(p^2+1)\cdot sin\left(\frac{1}{s}\right)\cdot ds+p\cdot s^2\cdot dp=0$;

2) $x\cdot y'+2y=1$, $y(0)=1$;

3) $(x-3y)\cdot dx+(2y-3x)\cdot dy=0$, y=1 при x=2.

Вариант №9

1) $y'-\frac{4y}{x}=x$, $y(1)=1$;

2) $cos^3(t)\cdot\sqrt{ln(s)+2}\cdot ds+sin(t)\cdot s\cdot dt=0$

3) $y'-\frac{y}{x}=-sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$, y=0при x=2.

Вариант №10

1) $y'+\frac{2y}{x}=x^6$;

2) $\frac{dy}{dx}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{y}{x}$, y=1 при x=1;

3) $sin(t)\cdot(p^2+1)\cdot dt-cos^2(t)\cdot p\cdot dp=0$, p=1 при t=2.

Вариант №11

1) $(m^2+4)\cdot s\cdot ds-m\cdot(s^2-4)\cdot dm=0$;

2) $\frac{dy}{dx}=y+x+1$, $y(0)=1$;

3) $(x^2+2y^2)\cdot dy+2x\cdot y\cdot dy=0$, y=1 при x=1.

Вариант №12

1) $\sqrt[3]{cos(h)}\cdot e^t\cdot dh-\frac{t}{sin(h)}\cdot dt=0$, h=1 при t=2;

2) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\cdot(ln(y)-ln(x))$;

3) $y'-\frac{y}{1-x^2}=3$, $y(0)=1$.

Вариант №13

1) $(t-2s)\cdot dt-(s+2t)\cdot ds=0$;

2) $2x\cdot\frac{dy}{dx}-4y=x^6$, $y(1)=1$;

3) $2q\cdot(p+1)\cdot dp-2p\cdot\sqrt{q}\cdot dq=0$, q=1 при p=1.

Вариант №14

1) $(p^2+1)\cdot\sqrt{s}\cdot ds+p\cdot s\cdot dp=0$;

2) $(x-y)\cdot dx+(2y-x)\cdot dy=0$, y=1 при x=1;

3) $x\cdot y'-2y=1$, $y(1)=1$.

Вариант №15 1) $cos(t)\cdot\sqrt{s}\cdot ds+sin(t)\cdot s\cdot dt=0$, s=1 при $t=\frac{\pi}{6}$;

2) y'-$\frac{2y}{x}=x^2$, $y(1)=2$;

3) $y'=\frac{y}{x}-2\,sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$.

Вариант №16 1) $x\cdot y'$ -$4y=x^3$, $y(1)=-1$;

2) $(x-y)\cdot dx+(y+x)\cdot dy=0$, y=1 при x=2;

3) $2q\cdot(p+1)\cdot dq+p\cdot\sqrt{q}\cdot dp=0$.

Вариант №17 1) $y'+\frac{2y}{x}=x$;

2) $cos(t)\cdot\sqrt{p}\cdot dt+sin^2(t)\cdot p^2\cdot dp=0$, p=1 при $t=\frac{\pi}{6}$;

3) $y'=\frac{y}{x}+2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

Вариант №18 1) $(x^2+2y^2)\cdot dx\ +4x\cdot y\cdot dy=0$;

2) $(p^2+p)\cdot s\cdot ds+p\cdot s^3\cdot dp=0$, p=1 при s=1;

3) $x\cdot y'$-$2y=x^3$, $y(2)=1$.

Вариант №19 1) $\sqrt[3]{cos(h)}\cdot e^t\cdot dh-\frac{t}{sin(h)}\cdot dt=0$;

2) $y'=4\,cos^2\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$, $y(1)=1$;

3) y' - $\frac{y}{x^2-1}=x-1$, y=1 при x=0.

Вариант №20 1) $2q\cdot(p+1)\cdot dq+p\cdot\sqrt{q}\cdot dp=0$;

2) $(t-y)\cdot dt-(y+t)\cdot dy=0$, y=1 при t=2;

3) $x\cdot y'+3y=x^5$, $y(2)=1$.

№3 (6 баллов)Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений и выделить частное решение, если указаны начальные условия

Вариант №1

1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0;$

2) $\dfrac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \dfrac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, \qquad s(0) = 1,\ s'(0) = 0;$

3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №2

1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0;$

2) $\dfrac{d^3 p}{dt^3} + 3 \cdot \dfrac{d^2 p}{dt^2} - 18 \cdot \dfrac{dp}{dt} = 0, \qquad p(0) = 1,\ p'(0) = 0;$

3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

Вариант №3

1) $y''' + 6y'' + 25y' = 0\ ;$

2) $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0;$

3) $\dfrac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \dfrac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0\ .$

Вариант №4

1) $\dfrac{d^3 L}{dt^3} + 10 \cdot \dfrac{d^2 L}{dt^2} + 29 \cdot \dfrac{dL}{dt} = 0,$

2) $y'' + 8y' + 15y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0;$

3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Вариант №5

1) $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0;$

2) $\dfrac{d^2 t}{dp^2} + 10 \cdot \dfrac{dt}{dp} + 25 \cdot t(p) = 0, \qquad t(0) = 3,\ t'(0) = 0;$

3) $y''' + 6y'' + 13y' = 0.$

Вариант №6

1) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0;$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0;$

3) $\dfrac{d^3 T}{dt^3} + 6 \cdot \dfrac{d^2 T}{dt^2} + 41 \cdot \dfrac{dT}{dt} = 0, \qquad T(0) = 1, T'(0) = 0.$

Вариант №7

1) $\dfrac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \dfrac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0\ ;$

2) $y'' + 2y' - 15y = 0;$

3) $y''' + 6y'' + 25y' = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0.$

Вариант №8

1) $y^{(4)}-4y'''-5y''=0;$

2) $\dfrac{d^2s}{dt^2}+6\cdot\dfrac{ds}{dt}+8\cdot s(t)=0,\qquad s(0)=1,\ s'(0)=0;$

3) $y'''+8y''+25y'=0.$

Вариант №9

1) $y^{(4)}-5y''-36y=0;$

2) $\dfrac{d^3p}{dt^3}+3\cdot\dfrac{d^2p}{dt^2}-18\cdot\dfrac{dp}{dt}=0,\qquad p(0)=1,\ p'(0)=0;$

3) $y''+8y'+41y=0.$

Вариант №10

1) $y'''+6y''+25y'=0\ ;$

2) $y''+2y'-15y=0,\quad y(0)=2,\ y'(0)=0;$

3) $\dfrac{d^2s}{dp^2}+8\cdot\dfrac{ds}{dp}+16\cdot s(p)=0\ .$

Вариант №11

1) $\dfrac{d^3L}{dt^3}+10\cdot\dfrac{d^2L}{dt^2}+29\cdot\dfrac{dL}{dt}=0,$

2) $y''+8y'+15y=0,\qquad y(0)=2,\ y'(0)=0;$

3) $y''+6y'+9y=0.$

Вариант №12

1) $y^{(4)}-y'''-12y''=0;$

2) $\dfrac{d^2t}{dp^2}+10\cdot\dfrac{dt}{dp}+25\cdot t(p)=0,\qquad t(0)=3,\ t'(0)=0;$

3) $y'''+6y''+13y'=0.$

Вариант №13

1) $y^{(4)}+5y''-36y=0;$

2) $y''+6y'+9y=0;$

3) $\dfrac{d^3T}{dt^3}+6\cdot\dfrac{d^2T}{dt^2}+41\cdot\dfrac{dT}{dt}=0,\quad T(0)=1,\ T'(0)=T''(0)=0.$

Вариант №14

1) $\dfrac{d^2s}{dp^2}+8\cdot\dfrac{ds}{dp}+16\cdot s(p)=0\ ;$

2) $y''+2y'-15y=0;$

3) $y'''+6y''+25y'=0,\quad y(0)=2,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0.$

Вариант №15 1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0;$

2) $\dfrac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \dfrac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, \qquad s(0) = 1,\ s'(0) = 0;$

3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №16 1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0;$

2) $\dfrac{d^3 p}{dt^3} + 3 \cdot \dfrac{d^2 p}{dt^2} - 18 \cdot \dfrac{dp}{dt} = 0, \qquad p(0) = 1,\ p'(0) = 0;$

3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

Вариант №17 1) $y''' + 6y'' + 25y' = 0\ ;$

2) $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0;$

3) $\dfrac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \dfrac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0\ .$

Вариант №18 1) $\dfrac{d^3 L}{dt^3} + 10 \cdot \dfrac{d^2 L}{dt^2} + 29 \cdot \dfrac{dL}{dt} = 0,$

2) $y'' + 8y' + 15y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0;$

3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Вариант №19 1) $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0;$

2) $\dfrac{d^2 t}{dp^2} + 10 \cdot \dfrac{dt}{dp} + 25 \cdot t(p) = 0, \qquad t(0) = 3,\ t'(0) = 0;$

3) $y''' + 6y'' + 13y' = 0.$

Вариант №20 1) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0;$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0;$

3) $\dfrac{d^3 T}{dt^3} + 6 \cdot \dfrac{d^2 T}{dt^2} + 41 \cdot \dfrac{dT}{dt} = 0, \qquad T(0) = 1, T'(0) = 0.$

№3(8 баллов) При начальных условиях y(0)= $y_o, y'(0) = y'_o$ найти решение уравнения $A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = f(x)$ (где $exp(a \cdot x) = e^{a \cdot x}$)

Вар.	Нач. условие		Коэффициенты ЛОДУ			Неоднородность $f(x)$
	y_o	y'_o	A	B	C	

1	5	4.5	2	−1	−1	$10 \cdot exp(2 \cdot x) - 7 \cdot sin(x) + cos(x) + 2 \cdot x$
2	0	19	2	16	50	$90 \cdot exp(2 \cdot x) - 32 \cdot cos(x) + 64 \cdot sin(x) + 118 - 100 \cdot x$
3	3	−6.5	2	1	−15	$-10 \cdot exp(2 \cdot x) + 19 \cdot cos(x) - 33 \cdot sin(x) - 62 + 30 \cdot x$
4	4	15	2	−16	34	$10 \cdot exp(2 \cdot x) - 48 \cdot cos(x) + 16 \cdot sin(x) + 66 - 68 \cdot x$
5	7	−6.5	2	3	−27	$-26 \cdot exp(2 \cdot x) + 35 \cdot cos(x) - 55 \cdot sin(x) - 60 + 54 \cdot x$
6	2	12	2	20	68	$116 \cdot exp(2 \cdot x) - 46 \cdot cos(x) + 86 \cdot sin(x) + 164 - 136 \cdot x$
7	5	4.5	2	5	3	$42 \cdot exp(2 \cdot x) + 9 \cdot cos(x) + 7 \cdot sin(x) + 2 - 6 \cdot x$
8	−4	−7	2	−8	10	$2 \cdot exp(2 \cdot x) - 16 \cdot cos(x) + 26 - 20 \cdot x$
9	−1	−28.5	2	−1	−55	$-98 \cdot exp(2 \cdot x) - 115 \cdot sin(x) - 108 + 55 \cdot cos(x) + 110 \cdot x$
10	4	1	2	24	90	$146 \cdot exp(2 \cdot x) - 64 \cdot cos(x) + 112 \cdot sin(x) + 222 - 180 \cdot x$
11	7	−0.5	2	9	−11	$30 \cdot exp(2 \cdot x) + 31 \cdot cos(x) - 17 \cdot sin(x) - 62 + 22 \cdot x$
12	−2	−6	2	−12	20	$4 \cdot exp(2 \cdot x) - 30 \cdot cos(x) + 6 \cdot sin(x) + 44 - 40 \cdot x$
13	1	−3.5	2	3	−9	$10 \cdot exp(2 \cdot x) + 17 \cdot cos(x) - 19 \cdot sin(x) - 24 + 18 \cdot x$
14	6	−5	2	16	50	$90 \cdot exp(2 \cdot x) - 32 \cdot cos(x) + 64 \cdot sin(x) + 118 - 100 \cdot x$
15	9	5.5	2	−5	−3	$-10 \cdot exp(2 \cdot x) - 5 \cdot cos(x) - 15 \cdot sin(x) - 2 + 6 \cdot x$
16	0	−1	2	−16	34	$10 \cdot exp(2 \cdot x) - 48 \cdot cos(x) + 16 \cdot sin(x) + 66 - 68 \cdot x$
17	3	5.5	2	7	5	$54 \cdot exp(2 \cdot x) + 11 \cdot cos(x) + 13 \cdot sin(x) - 4 - 10 \cdot x$
18	−2	32	2	20	68	$116 \cdot exp(2 \cdot x) - 46 \cdot cos(x) + 86 \cdot sin(x) + 164 - 136 \cdot x$
19	1	−3.5	2	9	−5	$42 \cdot exp(2 \cdot x) + 25 \cdot cos(x) - 5 \cdot sin(x) - 38 + 10 \cdot x$
20	2	5	2	−8	10	$2 \cdot exp(2 \cdot x) - 16 \cdot cos(x) + 26 - 20 \cdot x$

№4(4 балла)Дана система дифференциальных уравнений.

6) Найти методом исключения общее решение системы;
7) Записать общее решение системы в векторном виде;
8) Найти собственные числа и собственные векторы;
9) Изобразить эскиз интегральных кривых исходной системы в окрестности точки O(o; o) и исследовать такую точку покоя на устойчивость;
10) Из общего решения системы выделить частное решение системы при указанных начальных условиях.

Вариант №1 $\begin{cases} x'(t) = 9\cdot x + y \\ y'(t) = -78\cdot x - 10\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-6$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №2 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2\cdot x + 4\cdot y \end{cases}$, $x=-6 \quad y=-6$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №3 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20\cdot x - 8\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-5$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №4 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12\cdot x + 8\cdot y \end{cases}$, $x=2 \quad y=6$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №5 $\begin{cases} x'(t) = 9\cdot x + y \\ y'(t) = -98\cdot x - 12\cdot y \end{cases}$, $x=-2 \quad y=14$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №6 $\begin{cases} x'(t) = 11\cdot x + y \\ y'(t) = -136\cdot x - 14\cdot y \end{cases}$, $x=-2 \quad y=16$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №7 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20\cdot x - 8\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-5$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №8 $\begin{cases} x'(t) = 9\cdot x + y \\ y'(t) = -78\cdot x - 10\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-6$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №9 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2\cdot x + 4\cdot y \end{cases}$, $x=-6 \quad y=-6$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №10 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20\cdot x - 8\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-5$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №11 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12\cdot x + 8\cdot y \end{cases}$, $x=2 \quad y=6$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №12 $\begin{cases} x'(t) = 9\cdot x + y \\ y'(t) = -98\cdot x - 12\cdot y \end{cases}$, $x=-2 \quad y=14$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №13 $\begin{cases} x'(t) = 11\cdot x + y \\ y'(t) = -136\cdot x - 14\cdot y \end{cases}$, $x=-2 \quad y=16$ при $\mathrm{t}=0.$

Вариант №14 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}$, $x = 1$ $y = -5$ при $t = 0$.

Вариант №15 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}$, $x = 1$ $y = -6$ при $t = 0$.

Вариант №16 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2 \cdot x + 4 \cdot y \end{cases}$, $x = -6$ $y = -6$ при $t = 0$.

Вариант №17 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}$, $x = 1$ $y = -5$ при $t = 0$.

Вариант №18 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12 \cdot x + 8 \cdot y \end{cases}$, $x = 2$ $y = 6$ при $t = 0$.

Вариант №19 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -98 \cdot x - 12 \cdot y \end{cases}$, $x = -2$ $y = 14$ при $t = 0$.

Вариант №20 $\begin{cases} x'(t) = 11 \cdot x + y \\ y'(t) = -136 \cdot x - 14 \cdot y \end{cases}$, $x = -2$ $y = 16$ при $t = 0$.

№5(5 баллов)Исследовать числовой ряд на сходимость.
Для знакопеременных рядов исследовать также абсолютную сходимость

Вариант №1

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+\frac{14}{48}+\frac{17}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2-1}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{n!}$.

Вариант №2

1) $\frac{2}{3}-\frac{3}{6}+\frac{4}{12}-\frac{5}{24}+\frac{6}{48}-\frac{7}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cos(2n)}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{log_4(n+1)}$.

Вариант №3

1) $\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{24}+\frac{11}{120}+\frac{14}{720}+\frac{17}{5040}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,sin(n)}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^2(3n)$.

Вариант №4

1) $\frac{2}{5}-\frac{3}{7}+\frac{4}{9}-\frac{5}{11}+\frac{6}{13}-\frac{7}{15}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+2n}\right)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Вариант №5

1) $\frac{2}{2}+\frac{4}{6}+\frac{6}{18}+\frac{8}{54}+\frac{10}{162}+\frac{12}{486}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{4n+1}$.

Вариант №6

1) $\frac{2}{1}-\frac{4}{3}+\frac{6}{9}-\frac{8}{27}+\frac{10}{81}-\frac{12}{243}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2(2n)}{n^2+3n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{(n+1)^4}$.

Вариант №7

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+\frac{14}{48}+\frac{17}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^2\left(\frac{3}{n}\right)$.

Вариант №8

1) $\frac{4}{5}-\frac{5}{9}+\frac{6}{13}-\frac{7}{17}+\frac{8}{21}-\frac{9}{25}+\ .....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot sin\left(\frac{2}{n+1}\right)$.

Вариант №9

1) $\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{8}{8}+\frac{11}{16}+\frac{14}{32}+\frac{17}{64}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-\sqrt[3]{n+1}}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n^3+1}$.

Вариант №10

1) $\frac{2}{1}-\frac{4}{1}+\frac{6}{2}-\frac{8}{6}+\frac{10}{24}-\frac{12}{120}+\frac{14}{720}-.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+3n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^3}{(n+1)^4}$.

Вариант №11

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+\frac{14}{48}+\frac{17}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2-1}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{n!}$.

Вариант №12

1) $\frac{2}{3}-\frac{3}{6}+\frac{4}{12}-\frac{5}{24}+\frac{6}{48}-\frac{7}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cos(2n)}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{log_4(n+1)}$.

Вариант №13

1) $\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{24}+\frac{11}{120}+\frac{14}{720}+\frac{17}{5040}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,sin(n)}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^2(3n)$.

Вариант №14

1) $\frac{2}{5}-\frac{3}{7}+\frac{4}{9}-\frac{5}{11}+\frac{6}{13}-\frac{7}{15}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+2n}\right)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Вариант №15

1) $\frac{2}{2}+\frac{4}{6}+\frac{6}{18}+\frac{8}{54}+\frac{10}{162}+\frac{12}{486}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{4n+1}$.

Вариант №16

1) $\frac{2}{1}-\frac{4}{3}+\frac{6}{9}-\frac{8}{27}+\frac{10}{81}-\frac{12}{243}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2(2n)}{n^2+3n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{(n+1)^4}$.

Вариант №17

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+\frac{14}{48}+\frac{17}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^2\left(\frac{3}{n}\right)$.

Вариант №18

1) $\frac{4}{3}-\frac{5}{7}+\frac{6}{11}-\frac{7}{15}+\frac{8}{19}-\frac{9}{23}+\ .....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot sin\left(\frac{2}{n+1}\right)$.

Вариант №19

1) $\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{8}{8}+\frac{11}{16}+\frac{14}{32}+\frac{17}{64}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-\sqrt[3]{n+1}}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n^3+1}$.

Вариант №20

1) $\frac{2}{1}-\frac{4}{1}+\frac{6}{2}-\frac{8}{6}+\frac{10}{24}-\frac{12}{120}+\frac{14}{720}-.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+3n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^3}{(n+1)^4}$.

№6(3 балла)Найти интервал и область сходимости степенного ряда

Вариант №1 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2}{n+1} \cdot (x+4)^n$; Вариант №2 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x+5)^n$;

Вариант №3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \cdot (x-1)^n$; Вариант №4 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x+5)^n$;

Вариант №5 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+2} \cdot (x-3)^n$; Вариант №6 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot (x+2)^n$;

Вариант №7 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2n} \cdot (x-1)^n$; Вариант №8 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot (x+2)^n$;

Вариант №9 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+2} \cdot (x-6)^n$; Вариант №10 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n} \cdot (x+6)^n$;

Вариант №11 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2}{n+1} \cdot (x+4)^n$; Вариант №12 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x+5)^n$;

Вариант №13 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \cdot (x-1)^n$; Вариант №14 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+2} \cdot (x+3)^n$;

Вариант №15 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+2} \cdot (x-3)^n$; Вариант №16 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot (x+2)^n$;

Вариант №17 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2n} \cdot (x-1)^n$; Вариант №18 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot (x+2)^n$;

Вариант №19 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+2} \cdot (x-6)^n$; Вариант №20 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n} \cdot (x+6)^n$;

№7 (3 балла) Записать разложение функции *f(x)* в степенной ряд в окрестности точки $x = x_o$ и найти интервал сходимости полученного ряда

Вариант №1 1) $f(x) = 2e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №2 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №3 1) $f(x) = 2\cos(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$, $x_0 = 1$.

Вариант №4 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$, $x_0 = 2$.

Вариант №5 1) $f(x) = x \cdot e^{5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №6 1) $f(x) = (x-2) \cdot \sin(x-2)$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №7 1) $f(x) = 2\ln(x^2+1)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$, $x_0 = 2$.

Вариант №8 1) $f(x) = 2\sin(3x-3)$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$, $x_0 = 0$.

Вариант №9 1) $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №10 1) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+6}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №11 1) $f(x) = 2e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №12 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №13 1) $f(x) = 2\cos(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$, $x_0 = 1$.

Вариант №14 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$, $x_0 = 2$.

Вариант №15 1) $f(x) = x \cdot e^{5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №16 1) $f(x) = (x-2) \cdot \sin(x-2)$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №17 1) $f(x) = 2\ln(x^2+1)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$, $x_0 = 2$.

Вариант №18 1) $f(x) = 2\sin(3x-3)$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$, $x_0 = 0$.

Вариант №19 1) $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №20 1) $f(x) = x^2 \cdot sin(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+6}{x-3}$, $x_0 = 1$.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Новоуральский технологический институт

Кафедра высшей математики

Направление подготовки–15.03.05 - "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Профиль – «Технология машиностроения» (**КМ-24з**)

Квалификация (степень) выпускника – академический бакалавр

Форма обучения – Заочная

Дисциплина – **МАТЕМАТИКА, 3 СЕМЕСТР**

Экзаменационный билет №1

№1Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2 \cdot y}{x} = 2x^2;$$

№2 Найти частное решение дифференциального уравнения

$$4y = -y'' - 48 \cdot cos\,(3x)$$

$$\begin{cases} y(o) = 5 \\ y'(o) = 4 \end{cases} \quad ;$$

№3 Найти решение системы дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \cdot x + 2 \cdot y \\ y'(t) = 7 \cdot x + 3 \cdot y \end{cases} \qquad x = 1,\ y = -10 \ \text{при}\ t = 0 \quad ;$$

№4Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{n^3 + 1}$$

№5 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot \left(x+2 \right)^n$.

Составил: ______________________________ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: ________________________________Носырев Н.А.

Новоуральск

4 Справочник

- *Теорема Коши:* Если дифференциальное уравнение (ДУ) имеет вид $y^{(n)} = F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)})$, где Fнепрерывная функция и в некоторой области существуют и конечны производные $\dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial (y')}, \dfrac{\partial F}{\partial (y'')}, ..., \dfrac{\partial F}{\partial (y^{(n-1)})}$,

  ТО для всякого начального условия из такой области найдётся решение ДУ и такое решение единственно;
- ДУ *с разделяющимися переменными*, если $f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0$, для него общий интеграл $\int \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int \dfrac{-g_2(y)}{g_1(y)} dy$, частный интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{-g_2(y)}{g_1(y)} dy$;
- Функция однороднаяизмеренияk, если $f(t \cdot x; t \cdot y) = t^k \cdot f(x; y)$. При однородности нулевого измерения $f(x; y) = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$;
- *Однородное* ДУ имеет вид $f_1(x; y) \cdot dx + f_2(x; y) \cdot dx = 0$, где $f_1(x; y)$ и $f_1(x; y)$ однородные одинакового измерения. Его можно представить в виде $\dfrac{dy}{dx} = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

  Выполнив замену $z(x) = \dfrac{y}{x}$, $y = z \cdot x$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \cdot x + z$, получим уравнение с разделяющимися переменными, в его общем решении или в общем интеграле выполняется обратная замена;
- *Линейное* ДУ $\dfrac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$. Метод Бернулли: ищем решение в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ и требуем выполнения $\dfrac{dv}{dx} - p(x) \cdot v = 0$ т.е. $v(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}$, тогда $u(x) = \int \dfrac{q(x)}{v(x)} dx$;
- Уравнение $a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)$ при $f(x) \equiv 0$ является Линейным Однородным ДУ (ЛОДУ), в противном случае ЛНДУ;

- *Определитель Вронского* для функций $y_1, y_2, ..., y_n$ находится

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ...... & y_n \\ y_1' & y_2' & ...... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ...... & y_n'' \\ ...... & ...... & ...... & ...... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ...... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

- Для *n*решений ЛОДУвыполнено:
  1) Они линейно независимы $\Leftrightarrow \quad W(x) \neq 0;$
  2) Они линейно зависимы$\Leftrightarrow \quad W(x) = 0;$
- Если дано ЛОДУ $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0, \; a_k = Const$, то характеристическое уравнение $a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot \lambda^2 + a_n \cdot \lambda = 0$.
- Если $a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$, то $a_0 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_2 = 0$,

  А) $(\lambda_1, \lambda_2 \in \square\,, \lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow y_{оро} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x};$

  Б) $(\lambda_1, \lambda_2 \in \square\,, \lambda_1 = \lambda_2) \Rightarrow y_{оро} = e^{\lambda_1 \cdot x}(c_1 + c_2 \cdot x);$

  В) $\lambda_{1,2} = a \pm b \cdot i \Rightarrow y_{оро} = e^{a \cdot x} \cdot \left(c_1 \cdot \cos(b \cdot x) + c_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right) = c \cdot e^{a \cdot x} \sin(b \cdot x + \varphi)$,

  $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\,, \quad tg(\varphi) = \dfrac{c_1}{c_2};$
- Если дано ЛНДУ $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x), \; a_k = Const$ то решение ищем в зависимости от корней характ-гоур-я

Вид неоднородности	Вид решения $y_{\text{чрн}}$
$P_m(x)$	$x^{t_1} \cdot Q_m(x)$ $t_1 -$ кратность корня $\lambda = 0$
$P_m(x) \cdot e^{a \cdot x}$	$x^{t_2} \cdot P_m(x) \cdot e^{a \cdot x}$ $t_2 -$ кратность корня $\lambda = a$
$A_1 \cdot \cos(b \cdot x) + A_2 \cdot \sin(b \cdot x)$	$x^{t_3} \cdot \left(B_1 \cdot \cos(b \cdot x) + B_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right)$ $t_3 -$ кратность корня $\lambda = 0 + b \cdot i$
$e^{a \cdot x}\left(A_1 \cdot \cos(b \cdot x) + A_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right)$	$x^{t_4} \cdot e^{a \cdot x}\left(B_1 \cdot \cos(b \cdot x) + B_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right)$ $t_4 -$ кратность корня $\lambda = a + b \cdot i$

$e^{a\cdot x}\left(P_m(x)\cdot\cos(b\cdot x)+R_k(x)\cdot\sin(b\cdot x)\right)$	$x^{t_4}\cdot e^{a\cdot x}\left(Q_w(x)\cdot\cos(b\cdot x)+S_w(x)\cdot\sin(b\cdot x)\right)$ t_4- кратность корня $\lambda=a+b\cdot i$, $w=\max(m;k)$
f_1+f_2	y_1+y_2, где y_1- решение при неодн-ти f_1 y_1- решение при неодн-ти f_2

$P_m(x)-$ известный многочлен степени *n*и *A* - известное число, $Q_m(x)-$ многочлен, для которого применяем метод неопределенных коэффициентов. Для этого предполагаемую функцию и её производные подставляем в исходное ДУ и приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях правой и левой частей уравнения. Решение полученной системы и есть коэффициенты в решении;

- После нахождения $y_{оро}$ и $y_{\text{чрн}}$ записывают общее решение для ЛНДУ в виде $y_{орн}=y_{оро}+y_{чрн}$. После этого учитывается начальное условие и выделяется частное решение при подстановке необходимых $C_1,\ ......\ ,C_n$;
- Метод вариации постоянных: Для ЛНДУ ищем решение соответствующего ЛОДУ и находим фундаментальную систему решений (ФСР) $y_1,\ y_2,......\ ,y_n$. Тогда можно искать решение неоднородного уравнения в виде $y=c_1(x)\cdot y_1+c_2(x)\cdot y_2+....+c_n(x)\cdot y_n$, где для производных неизвестных функций $c_k(x)$ выполнено
$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1+c_2'(x)\cdot y_2+....+c_n'(x)\cdot y_n=0\\ c_1'(x)\cdot y_1'+c_2'(x)\cdot y_2'+....+c_1'(x)\cdot y_n'=0\\ \quad ....\\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)}+c_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)}+....+c_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)}=f(x)\end{cases}$$
- Система дифференциальных уравнений $\begin{cases} x''+2x-3y'+\sin(t)=0\\ \dfrac{1}{2}\cdot y'''+2x'+y''-t=0\end{cases}$ с двумя искомыми функциями $x(t)$ и $y(t)$ имеет порядок $n=n_1+n_2=2+3$ (сумма старших порядков производных). В

каноническом виде она записывается $\begin{cases} x'' = -2x + 3y' - \sin(t) \\ y''' = -2x' - 2y'' + 2t \end{cases}$. К нормальному виду перейдём с увеличением числа искомых функций

$$\begin{cases} x'' = -2x + 3y' - \sin(t) \\ y''' = -2x' - 2y'' + 2t \\ x'(t) = y_3, \quad x(t) = y_1,\ y(t) = y_2, \\ y'(t) = y_4 \\ \left(y'(t)\right) = y_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3' = -2y_1 + 3y_4 - \sin(t) \\ y_5' = -2y_3 - 2y_4 + 2t \\ y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_4' = y_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -2y_1 + 3y_4 - \sin(t), \\ y_4' = y_5 \\ y_5' = -2y_3 - 2y_4 + 2t \end{cases} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(t) \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix};$$

- Решение системы ДУ методом исключения $\begin{cases} x'(t) = 6x + 3y \\ y'(t) = -3x - 4y \end{cases}$

1) $x'' = 6x' + 3y'$; 2) $x'' = 6x' + 3\cdot\left(-3x - 4y\right)$, $x'' = 6x' - 9x - 12y$;

2) $y = \dfrac{x' - 6x}{3} \Rightarrow x'' = 6x' - 9x - 12\cdot\dfrac{x' - 6x}{3}$, $x'' = 2x' + 15x$;

3) $x'' - 2x' - 15x = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$,

общее решение $x(t) = c_1 \cdot e^{-3\cdot t} + c_2 \cdot e^{5\cdot t}$;

4) $y = \dfrac{x' - 6x}{3} = \dfrac{1}{3}\left((-3c_1 \cdot e^{-3\cdot t} + 5c_2 \cdot e^{5\cdot t}) - 6(c_1 \cdot e^{-3\cdot t} + c_2 \cdot e^{5\cdot t})\right)$,

$y(t) = -3c_1 \cdot e^{-3t} - \dfrac{1}{3}c_2 \cdot e^{5t}$;

2) Общее решение системы $\begin{cases} x(t) = c_1 \cdot e^{-3\cdot t} + c_2 \cdot e^{5\cdot t} \\ y(t) = -3c_1 \cdot e^{-3t} - \dfrac{1}{3}c_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$

или $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$ т.е. собственные числа $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 5$, их собственные векторы $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ и коллинеарные им векторы;

- Виды интегральных кривых (траекторий) и точки покоя для линейной однородной системы 2-го порядка с постоянными коэффициентами (в зависимости от собственных чисел)

1) λ_1 и λ_2 действительные числа одного знака. Получаем искривленные параболы с общей вершиной, их ось задаёт один из собственных векторов (с наибольшим $|\lambda|$). Точка покоя — *узел*.

   1.1) При $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ точки удаляются от вершины с возрастанием параметра t(времени), узел неустойчивый;

   1.2) При $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ точки приближаются к вершине с возрастанием времени, узел устойчивый;

2) λ_1 и λ_2 действительные числа разных знаков, $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$. Получаем искривленные гиперболы с общим центром, для которых собственные векторы задают асимптоты. Их точки удаляются от центра и с возрастанием параметра t(времени)приближаются к оси, заданной вектором $\vec{h}_1$ (с положительным λ). Точка покоя — *седло*;

3) $\lambda_{1,2} = 0 \pm b \cdot i$ чисто мнимые. Получаем множество искривленных эллипсов с общим центром в начале координат и осями по собственным векторам. Точка покоя — *центр*;

4) $\lambda_{1,2} = a \pm b \cdot i$ комплексно-сопряженные. Получаем множество спиралей с бесконечным числом витков. Точка покоя — *фокус*.

   4.1) Если $a > 0$, то при вращении вокруг центра точки удаляются от него с возрастанием времени, фокус неустойчивый;

   4.2) Если $a < 0$, то при вращении вокруг центра точки приближаются к нему с возрастанием времени, фокус устойчивый;

5) При $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$ получаем множество прямых, параллельных между собой и собственному вектору $\vec{h}_2$.

5.1) При $\lambda_2 > 0$ с возрастанием времени точки удаляются в обоих направлениях от прямой, заданной вектором $\vec{h}_1$;

5.2)При $\lambda_2 < 0$ с возрастанием времени точки приближаются в обоих направлениях к прямой, заданной вектором $\vec{h}_1$;

- Числовой ряд $a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots$,

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ − частичная сумма ряда;

- Если $a_n = f(n)$ − общий член ряда, то записывают $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum a_n$;
- Ряд *сходится*, если существует конечное число $S = \lim_{n\to\infty}(S_n)$,

  тогда S− сумма ряда, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- *Геометрическая прогрессия* со знаменателем q

  $$\sum_{n=0}^{\infty} b_1 \cdot q^n = b_1 + (b_1 \cdot q) + \left(b_1 \cdot q^2\right) + \ldots\ldots + \left(b_1 \cdot q^n\right) + \ldots\ldots ,$$

  она сходится только при $|q| < 1$,

  её частичная сумма $S_n = \dfrac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ даёт $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$;
- *Необходимое* условие сходимости $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

  Из $|a_n| - \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ следует расходимость ряда;
- Для знакоположительных рядов ($a_n > 0$) выполнено

3) *Признак Даламбера*: если существует $p = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$,

$$\text{то} \quad \begin{cases} \text{при} \quad p < 1 \ \text{ряд сходится} \\ \text{при} \quad p > 1 \ \text{ряд расходится} \\ \text{при} \quad p = 1 \ \text{неопределённость} \end{cases} ;$$

4) *Признак Коши* (радикальный): если существует $q = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$,

то $\begin{cases} \text{при } \ q<1 \ \text{ ряд сходится} \\ \text{при } \ q>1 \ \text{ ряд расходится} \\ \text{при } \ q=1 \ \text{ неопределённость} \end{cases}$;

Напоминание: $\sqrt[n]{const} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,\ \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1;$

5)*Интегральный* признак: Если найдётся непрерывная функция $f(x)$, что выполнено $f(n)=a_n,\ n\in\mathbb{N}$, то числовой ряд $\sum a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_M^{+\infty} f(x)\,dx$ одновременно сходятся либо одновременно расходятся;

6) Признак *эквивалентности*: Эквивалентные знакоположительные ряды одновременно сходятся либо одновременно расходятся. Если $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^k}$, то при $k>1$ ряд сходится, при $k\le 1$ ряд расходится;

- Знакопеременный ряд сходится*абсолютно*, если ряд $\sum a_n$ сходится и сходится ряд $\sum |a_n|$. Если $\sum a_n$ сходится, но ряд $\sum |a_n|$ расходится, то ряд сходится *условно* и можно подобрать перестановку и (или) группировку его элементов, при которой сумма ряда станет заданным произвольно числом;
- Теорема Лейбница: Если $\sum a_n$ знакочередующийся,

  То А) При выполнении $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ряд сходится;

  Б) Для сходящегося ряда выполнено $\left|S-S_n\right|<|a_{n+1}|$;

  В) Знак разности $(S-S_n)$ совпадает со знаком числа a_{n+1};

- Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\cdot(x-x_0)^n$ является *степенным* с центром сходимости $x=x_0$. Внутри интервала сходимости $(x_0-R;\ x_0+R)$ он сходится и вне такого интервала расходится.
- Радиус сходимости степенного ряда

  а) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right)$; б) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$;

- Ряд Тейлора $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\cdot\left(x-x_0\right)^n$, где $b_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;
- Основные разложения Маклорена в степенной ряд ($x_0=0$):

1) $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots..+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots.;$

2) $\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots.+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots..;$

3) $\sin(x)=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots.+(-1)^{2n-1}\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}+\ldots..;$

4) $\ln(1+x)=\dfrac{x^1}{1}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots.+(-1)^n\cdot\dfrac{x^n}{n}+\ldots..;$

5) $\left(1+x\right)^m=1+\dfrac{m}{1!}\cdot x+\dfrac{m\cdot(m-1)}{2!}\cdot x^2+\dfrac{m\cdot(m-1)\cdot\left(m-2\right)}{3!}\cdot x^3+\ldots.$