Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

НОВОУРАЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра высшей математики

Ю.В.Орлов

Учебно-методический комплекс

дисциплины «Математика», 2 семестр

Учебно-методическое пособие

Направление подготовки	–	15.03.05 - "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств"
Профиль	–	Технология машиностроения
Квалификация (степень) выпускника	–	академический бакалавр
Форма обучения	–	**заочная**

Новоуральск, 2024

МиМ 2.3-   -25

Орлов Ю.В. Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины «Математика», 2 семестр   для бакалавров заочной формы обучения профиля «Технология машиностроения».
– Новоуральск, изд. НТИ НИЯУ МИФИ, 2024 – 88 с.

Пособие содержит выписку из рабочей программы дисциплины, контрольную работу (две части), методику оценки и справочник. Выдается студентам заочной формы обучения в начале семестра, вариант – номер студента в списке группы.

УМК составлен ст. преподавателем кафедры Высшей математики НТИ НИЯУ МИФИ   ***Орловым Юрием Владимировичем.***

Пособие рассмотрено на заседании кафедры Высшей математики НТИ НИЯУ МИФИ

"______"________________ 20 ___ г.   протокол № _________
и рекомендовано для подготовки бакалавров.

Заведующий кафедрой   высшей математики

Н.А. Носырев ________________   «____» _______ 20____ г.

Содержание

Пособие предназначено для проведения типовой работы (домашней контрольной работы) в группах второго семестра первого курса заочной формы обучения по профилю «Технология машиностроения». Пособие содержит задания по темам «Предел, непрерывность, производная функции одной переменной» и «Интегрирование». Каждый студент находит свой порядковый номер N в списке группы, по нему выбирает вариант контрольного задания. Если номер N превосходит 30, то студент выполняет вариант задания под номером N – 30.

Контрольные выполняются в соответствии со стандартом оформления текстовых документов (рассмотрена в УМК 1 сем.). При решении контрольного задания рекомендуется воспользоваться конспектами лекций и литературой из приведённого в конце пособия списка.

1 Выписка из рабочей программы

дисциплины «Высшая математика» для подготовки бакалавров по направлению 15.03.05 – «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» направления «Технология машиностроения» заочной формы обучения

1.1 Структура и содержание учебной дисциплины

Семестр – 2 Трудоёмкость 4 ЗЕТ, 135 ч., Экзамен

№ п/п	Название темы/раздела учебной дисциплины	Неделя семестра	Виды учебных занятий, и их трудоемкость (в часах)				Ссылка на ПР УД	Форма контроля
			Лекции	Практ. занятия	Лаборат. занятия	Самост. работа		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Пределы последовательностей и функций	1-3	4	4		8	З3, У3, В3	Дз-2 Часть 1
2.	Производная функции одной переменной	4-5	2	2		8		
3.	Свойства дифференцируемых функций	6-7	2	2		8		
4.	Исследование функций и построение их графиков. Задачи на оптимизацию	8-10	4	4		8		
5.	Неопределенный и определённый интеграл, их связь	11-12	2	2		8	З3, У3, В3-В4	Дз-2 Часть 2
6.	Основные методы интегрирования	13-14	2	2		8		
7.	Применения интегралов	15-16	2	2		6		
Итого:			18	18		54		
8.	Экзамен (Э-2)		Контроль – 9 ч.					

Дз-2 «Задания по математике, 2 семестр»

часть 1 «Пределы, непрерывность, производная функции одной переменной» выдаётся на 2 нед., сдача на 11 нед.,

часть 2 «Интегрирование» выдаётся на 10 нед., сдача на 18 нед.

1.2 Планируемые результаты освоения образовательной программы, относящиеся к учебной дисциплине

В результате освоения дисциплины «Математика», 2 семестр студент **должен**:

Код		**Результаты обучения**	**Показатели оценки результатов**
знать	**З3**	Основные понятия дифференциаль-ного и интегрального исчисления	-Знание определений и свойств пределов последовательностей и функций; - Знание определения, геометрического и физического смыслов производной для *f(x);* - Знание таблицы и правил вычисления производных; - Знание связи монотонности и выпуклости со знаками первой и второй производной; - Знание метода решения задач одномерной оптимизации; - Знание общего плана исследования функции одной переменной и построения её графика; - Знание определение первообразной, таблицы неопределённых интегралов и их свойств; - Знание методов вычисления основных видов интегралов (замена переменной, интегрирование по частям, рациональные дроби, тригонометрические функции); - Знание метода вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница; - Знание методов вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел с помощью определенного интеграла.
уметь	**У3**	Применять дифференциальное и интегральное исчисления	- Умение вычислять пределы последовательностей и функций; - Умение находить производные функций с разным способом задания; - Умение находить максимум (минимум) функции; - Умение решать текстовые задачи на оптимизацию; - Умение исследовать функцию и построить её график; - Умение находить неопределённые интегралы; - Умение вычислять определённые интегралы; - Умение находить площадь фигуры и объём тел.

владеть	**В3**	Методами исследования функций и построения их графиков	- Владеть навыками вычисления пределов, включая случаи неопределённостей; - Владеть навыками вычисления производных функций одной переменной с разными способами их задания; - Владеть навыками нахождения промежутков монотонности функции и их экстремумов; - Владеть навыком нахождения промежутков выпуклости функции и точек перегиба их графиков; - Владеть навыком нахождения асимптот графика функции; - Владеть навыком исследования функций и построения их графика; - Владеть навыками решения текстовых задач оптимизации.
	В4	Методами решения типовых задач геометрии и физики на основе интегрального исчисления	- Владеть методами вычисления основных видов неопределённых интегралов; - Владеть методами вычисления определённых интегралов; - Владеть заменой переменной и интегрирования по частям в неопределённых и определённых интегралах; - Владеть методами вычисления площадей плоских фигур с различными способами описания их границ; - Владеть методами вычисления объёма тел по поперечным сечениям и тел вращения.

1.3 *Компетенции*, реализуемые при изучении дисциплины

Код компетенции	**Компетенции**
УКЕ-1	Способен использовать знания естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в поставленных задачах
В14	Формирование глубокого понимания социальной роли профессии, позитивной и активной установки на ценности избранной специальности, ответственного отношения к профессиональной деятельности, труду
В15	Формирование психологической готовности к профессиональной деятельности по избранной профессии

Навыки, полученные в данной дисциплине, помогают в изучении дисциплин, формирующих компетенцию **ОПК-1** «Способность использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда» и **ПК-3** «Способность участвовать в постановке целей проекта (программы), его задач при заданных критериях, целевых функциях, ограничениях, разработке структуры их взаимосвязей, определении приоритетов решения».

2 Контрольная работа

Дз-2 часть 1 Домашняя контрольная работа по теме
«Предел, непрерывность, производная функции одной переменной»
выдаётся на 2неделе, сдача на 13 неделе 2 семестра

В КАЖДОМ ВАРИАНТЕ

№1 –4 балла, №2 – 2 балла, №3: 1–2 б., 2– 1 б., 3–2 б., 4 –2б., 5 – 16 б.

Вариант №1

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^3-4x^2+3x}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+1})\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1\\ \dfrac{2}{x+1} & \text{при} \quad -1<x<0\\ 3\sin(2x) & \text{при} \quad 0\le x\le 2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{\lg^3 2x\cdot(2x-1)^3}{\sqrt{1-x}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2+1\\ y=2t^2+t\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^3-2\right)^{x-1}$; б) $x^3-3xy+2y^3+2y+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$\lg(99)$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$; б) $s(t)=(2t+3)\cdot e^{-2(t+1)}$.

Вариант №2

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-4x^2+4x}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x)-\sin(3)}{6-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & \text{при} \quad x\le -3 \\ \dfrac{1}{2x+6} & \text{при} \quad -3<x<0 \\ (x-3)^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 4 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x^3+3)\cdot tg(x^2)}{\ln 3x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases} x=3-4t^3 \\ y=e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1-2x^3\right)^{\sin x+1}$;   б) $\sin(2x)-x\cdot y^3+3y+3=0$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2-x^2}{x+4}$;   б) $s(p)=\dfrac{e^{2(p+1)}}{2(p+1)}$.

Вариант №3

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{5x^2+2x-3}{x^3-2x^2-3x}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-3}\right)^{3x-x^2}$;

3) $\lim\limits_{s\to\infty}\left(s\cdot(ln(s+1)-ln(s+5))\right)$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{при} \quad x\le -1\\ \dfrac{2}{x+2} & \text{при} \quad -1<x<0\\ -cos(3x) & \text{при} \quad 0\le x\le 2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{3\cdot(x-x^2)+arcsin\,x}{x^3-4};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=-1$

$$\begin{cases}x=t+3t^2\\ y=2^{2t+2}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(x\text{-}1)^{x^{x+11}}$; б) $tg(3x)+e^x\cdot y^4+3y=1$;

4. Вычислить приближенно

$\cos 44^{\circ}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-2x}{3-x}$; б) $d(s)=3\cdot ln\left(\dfrac{s}{s\text{-}3}\right)\text{-}1$.

Вариант №4

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-7x+6}{3x^2-4x+1}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3t-1}-\sqrt{3t+2}}{6-2t}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-6x^2\right)^{\frac{x-3}{x^2}}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{при} \quad -5<x\le -2 \\ (x-3)^2 & \text{при} \quad -2<x<0 \\ \dfrac{1}{2x+6} & \text{при} \quad x\ge 0 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x+1)^{10}+arctgx}{\sin 4x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^5-3t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^3-3\right)^{lg\,3x+1}$; б) $arctg(5x\text{-}1)+x^2\cdot y^3\text{-}3y=x$;

4. Вычислить приближенно

$$2^{0,98};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x}{x+4}$; б) $S(t)=(5-t)\cdot e^{t-2}$.

Вариант №5

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{x^2-4x+3}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{p\to\infty}\left(p^2\cdot(\sqrt{p^2-3p}-\sqrt{p^2+p}\ )\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3}\right)^{3x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1\\ (x+2)^2-2 & \text{при} \quad -1<x<0\\ 3\sin(2x) & \text{при} \quad x\ge 0\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\arccos((3x-2)^2)\cdot\ln(\cos x+3)\cdot tg^4(x);$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases}x=t-t^2\\ y=t+3t^3\end{cases};$$

3. Найти производную функции

$f(x)=(4x\text{-}6)^{x\text{-}3}$; б) $x\cdot e^{2x}+x^3\cdot y^4\text{-}2tg(y)=0$;

4. Вычислить приближенно

$\cos(61^{\circ})$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{4-x^2}{x+3}$; б) $H(t)=\dfrac{e^{2\text{-}t}}{2-t}$.

Вариант №6

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(x)-\cos(1)}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{4x-3}\right)^{-x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}(x-3)^2 & \text{при} \quad x\le -3\\ \dfrac{3}{2x}+2 & \text{при} \quad -3<x<0\\ tg\left(\dfrac{x}{4}\right) & \text{при} \quad 0\le x<2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2}{cos(2x-3)-3}\right)^4\cdot 3^{x-6}+\frac{2}{1-2x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=e^{-2+2t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1\text{-}2x^3\right)^{\sin x+3}$; *б)* $x\cdot\cos(3x)-2\sqrt{y}+3y+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2-x^2}{x+4}$; *б)* $D(k)=\ln\left(\dfrac{k}{k+2}\right)+1$.

Вариант №7

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{y\to\infty} \left((y+2)\cdot(\ln(y+1)-\ln(y+5)) \right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{3-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2+2x-8}{x^3+x^2-2x}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{при} \quad x\le -1 \\ \dfrac{2}{x}-2 & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 3\cos(2x) & \text{при} \quad 0\le x<\pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции
$f(x)=(2-3\cos 4x)^4\cdot\log_2(x^2-3x)$;
2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2
$\begin{cases} x=2t^2-t \\ y=t-1 \end{cases}$;
3. Найти производную функции
а) $f(x)=(3\text{-}2\cos x)^{3-x}$; б) $2\cos^3(x)+2\sin(3y)\text{-}3y+1=0$;
4. Вычислить приближенно
$\sin(134^{\circ})$;
5. Провести полное исследование функции и построить график
а) $y(x)=\dfrac{2-3x}{x+4}$; б) $K(t)=(t\text{-}2)\cdot e^{3\text{-}t}$.

Вариант №8

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(1-\sin(2x)\right)^{\frac{-3}{x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-7x^3+6x^2}{3x^2-4x+1}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, a_4=$-\infty$;

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{-2x}+3x^3-20\cdot lg(13x)-\sqrt{x+2}}{x\cdot\sqrt[3]{x^8-x}\;+\;0{,}8^x-4\cos(2x)}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+10} & \text{при}\quad -5<x\le -2\\ (x-3)^2 & \text{при}\quad -2<x<0\\ -2\ln(x+1) & \text{при}\quad x\ge 0\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2x}{\cos^2(2x-3)-3}\right)\cdot 3^{x-6};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=e^{-2+2t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(4+x^3\right)^{2x+3}$; б) $2^{2x-1}+3x\cdot y^7-5y+\sqrt{2}=0$;

4. Вычислить приближенно

arcsin(0,995)

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2}{3x-6}$; б) $x(y)=\dfrac{e^{2(y-1)}}{2(y-1)}$.

Вариант №9

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-3}\right)^{-5x}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+n}\ )\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{4x^2-6x+2}{x^4-4x^3+3x^2}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+10} & \text{при} \quad -5\le x\le -1\\ \dfrac{-4}{x+1} & \text{при} \quad -1<x<0\\ 3\sin(2x) & \text{при} \quad 0\le x<2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\ln^3 3x+2x\right)^5\cdot x;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t-4\\ y=t^3-2t\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(2+\ln(x)\right)^{4x\text{-}3}$; б) $x\cdot 2^x+x^3\cdot y^2-3y+1=0$;

4. Вычислить приближенно

arctg(0,99) ;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-4}$; б) $L(p)=3-3\ln\left(\dfrac{p}{4+p}\right)$.

Вариант №10

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{6x^3-2x^2+4x}{x^2+4x+4}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x)-\sin(3)}{6-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3}\right)^{x^2-2x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} 2\cdot\lg(-(3+x)) & \text{при} \quad x<-3 \\ \dfrac{1}{2x-2} & \text{при} \quad -3<x<0 \\ (x-3)^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 4 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{1-x}{x^2}\right)^4\cdot\cos^3\left(x^3-4\right);$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases} x=2t^2+3t \\ y=t-1 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

   а) $f(x)=(3x-4)^{5x}$; б) $x^{\sqrt{2}}-x\cdot y+3\sin(y)+1=0$;

4. Вычислить приближенно

   $(1{,}95)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

   а) $y(x)=\dfrac{2-x^2}{x+4}$; б) $A(z)=-(2z+1)\cdot e^{2(z+1)}$.

Вариант №11

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+10}{x-3}\right)^{3-2x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2+5x-7}{x^2+5x-6}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{s\to 0}\ \dfrac{sin^3(2x)+3\cdot e^{2x^3}-3}{tg(x^3)-x\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{при}\quad x\le -1\\ \dfrac{2}{x+2} & \text{при}\quad -1<x<0\\ \dfrac{-|x-1|}{x-1} & \text{при}\quad 0\le x\le 2,\ x\ne 1\\ 2 & \text{при}\quad x=1\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2}{cos^3(4x-3)}\right)^4\cdot 3^{x^2-6};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=e^{-2+2t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(3+2x^3\right)^{2x+3}$; б) $log_2(2x\text{-}10)+\sqrt{2y}+3y=1$;

4. Вычислить приближенно

$(2{,}03)^8$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$; б) $J(t)=\dfrac{e^{2(t+2)}}{2(t+2)}$.

Вариант №12

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-4x+1}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} (1-6x)^{\frac{-3}{sin(2x)}}$;

3) $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3p-1}-\sqrt{3p+k}}{6-2p}$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{при} \quad -4\le x\le -2 \\ \dfrac{2}{x+2} & \text{при} \quad -2<x<0 \\ \dfrac{1}{2x+6} & \text{при} \quad x\ge 0 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x^3+3)\cdot tgx}{ln(3x-1)};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases} x=3-4t^3 \\ y=e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(5x+2)^{x-x^2}$; *б)* $3x^4+x\text{-}3y^4+3y=2$ *;*

4. Вычислить приближенно

$log_2(255{,}8)$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$; *б)* $F(s)=ln\left(\dfrac{s}{s-2}\right)\text{-}\ 2$.

Вариант №13

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot(\sqrt{x^2-3p}-\sqrt{x^2+1}\ )\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{x^2+4x+3}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3x}\right)^{3x-x^2}$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{при } -5\le x\le -1 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{при } -1<x<0 \\ 3\sin(x-1) & \text{при } x\ge 0 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\sin^4\left(5x^2-\frac{x}{1-x^2}\right)-\frac{\sqrt{7}}{x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases} x=3-t^2 \\ y=2+(t-2)^2 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(5x)^{2x-\sqrt{x}}$; б) $\sqrt[3]{2-x}+\sin^2(y)+3y-4=0$;

4. Вычислить приближенно

$\operatorname{tg}(134{,}78^{o})$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4x-5}$; б) $D(y)=\dfrac{2y+5}{e^{2(y+2)}}$.

Вариант №14

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{4x-3}\right)^{-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x^2-a^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(x+3)^2} & \text{при } -6<x\le-3\\ 2x+3 & \text{при } -3<x\le 0\\ tg\left(\dfrac{x}{4}\right) & \text{при } 0<x<2\pi\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=2^4\cdot(5x^2-\frac{x}{1+x^2})-\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{x}\right)\cdot\frac{1}{x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=0$

$$\begin{cases}x=3-6t\\ y=t\cdot(t-2)^2\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{2\sqrt{x}}$; б) $x\cdot\sin(x)\cdot y^3+2y=3$

4. Вычислить приближенно

$\sqrt[3]{-7{,}85}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$; б) $C(h)=\dfrac{e^{3-h}}{3-h}$.

Вариант №15

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{4x+1}\right)^{3-x}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+5)\cdot(ln(x+3)-ln(x+1))\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-8}{x^3+x^2-6x}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=+\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1 \\ \dfrac{-2}{(1-x)^3} & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 2\cos(2x) & \text{при} \quad 0\le x<\pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=arcsin\left(x^3\cdot\sqrt[5]{lg(3x\text{-}1)}\right)-\sqrt[21]{3-4e^2};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases} x=(2t-1)^2 \\ y=(t-1)\cdot sin(t-2) \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(3x+2)^{-ln\,x}$;   б) $x^{-3}+2\,sin(3y)\text{-}4y+x=1$;

4. Вычислить приближенно

$\sqrt[4]{257}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-5x}$;   б) $P(t)=2\,ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)\text{-}1$.

Вариант №16

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{e^x+3x^3-20\cdot\log_3(13x)-\sqrt{x^2+2}}{x\cdot\sqrt[3]{x^5-x^2}\ \ +\ 0{,}8^{-x}-4\cos^2(x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-16}{3x^2-4x-4}$ при a_1= -2, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(1+tg(2x)\right)^{\frac{3}{x}}$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & \text{при} \quad -5<x\le-2\\ (x-3)^2 & \text{при} \quad -2<x<0\\ 2\lg(x+2) & \text{при} \quad x\ge 0,\ x\ne 8\\ 0 & \text{при} \quad x=8\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции
$$f(x)=\left(\sin^3\left(x^2-4\right)-\cos(2)\right)\cdot\log_3\left(x^4-2\arcsin(0{,}4)\right);$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2
$$\begin{cases}x=t^2\\ y=3\cdot\ln t\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^2+3\right)^{x+3x^3}$; б) $x^6\text{-}x\cdot y^5+3y=3$;

4. Вычислить приближенно
tg($134{,}6^{\circ}$) ;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$; б) $E(s)=(4-s)\cdot e^{s-3}$.

Вариант №17

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\cdot\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+n}\right)\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3+4x^2-7x}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{при}\quad -5\le x\le -1\\ \dfrac{2}{x+1} & \text{при}\quad -1<x<0\\ 2\cos(x) & \text{при}\quad 0\le x\le 2\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=2^{x^2\cdot\cos(3x-4)}\cdot\left(tg(1)-\frac{3}{4x-2}\right);$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases}x=t+t^3\\ y=(t-1)^2\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x+3x^4\right)^{x+3}$; б) $\dfrac{1}{x-1}+x^2\cdot y^3-4y+2=0$;

4. Вычислить приближенно

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8{,}02}};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x-1}{2x+2}$; б) $L(k)=-\dfrac{e^{-2(k+2)}}{2(k+2)}$.

Вариант №18

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-4x^2+4x}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin^2(x-2)+\sqrt{2x-3}}{tg^3(4-2x)}$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases} 4x+10 & \text{при } -5<x\le-3 \\ \dfrac{6}{2x+6} & \text{при } -3<x<0 \\ (x-3)^2-2 & \text{при } 0\le x\le 4 \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов.

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(tg^2\left(x^2-4\right)-4\right)\cdot 2^{x^4-2\arcsin(0.3)};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} п ри $t=1$

$$\begin{cases} x=t^2+3t \\ y=3e^{2t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

   а) $f(x)=x^{2-3x^2}$; б) $y^4-3x\cdot e^{3x}+y-12=0$;

4. Вычислить приближенно

   $\sqrt{120{,}6}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

   а) $y(x)=\dfrac{3x^2-3}{x+2}$; б) $S(h)=2\ln\left(\dfrac{h+3}{h}\right)-3$.

Вариант №19

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{s\to+\infty} \left((1-s)\cdot(ln(s+5)-ln(s+5)) \right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{5x^2+2x-3}{x^3-x^2}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4x+1}{3x-3}\right)^{3x-x^2}$;

3).

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & \text{при} \quad -4<x\le-1\\ \dfrac{2}{x+1} & \text{при} \quad -1<x<0\\ 3cos(2x)-1 & \text{при} \quad 0\le x<\pi\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=arctg(x^5-3x)\cdot\frac{sin^3(3)}{\sqrt[5]{2x-4}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} п ри $t=2$

$$\begin{cases}x=t-t^2\\ y=3(t+2t)^2\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(x+5x^2)^{-x^2}$; б) $y\cdot arctg(2x)-4y^4+3=x$;

4. Вычислить приближенно

$(1.005)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x}$; б) $F(y)=(2y\text{-}1)e^{2(1\text{-}y)}$.

Вариант №20

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-6x^2\right)^{\frac{x-3}{x^2}}$;;

2) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{n!+3n^2-4\sqrt{3n+2}}{6-2n^8+10^n}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-x^2}{3x^2-4x+1}$ при $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}-2x+5 & \text{при } -5<x\le -2\\ \sin(x+2) & \text{при } -2<x<0\\ \dfrac{1}{2x-4} & \text{при } x\ge 0,\ x\ne 2\\ 2 & \text{при } x=2\end{cases},$$ построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=2^{\sqrt{3}\cdot \log_3(3x^2-5x)}\cdot \sin(\sqrt{x});$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=3e^{t-1}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=x^{-3x^2-x}$; *б)* $3x^{-7}+\dfrac{2y}{3x-2}+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$\operatorname{arctg}(0{,}995)$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+2x^2}$; *б)* $X(p)=\dfrac{e^{-(p+2)}}{p+2}$.

Вариант №21

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3}\right)^{3x}$;

2) $\lim\limits_{p\to\infty}\left(p^2\cdot(\sqrt{p^2-3p}-\sqrt{p^2+p}\ )\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-2x^2+2x}{x^3-27}$ при $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}4\cdot\dfrac{1}{x+5}+3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1\\ (x+2)^2-2 & \text{при} \quad -1<x<0\\ 2 & \text{при} \quad x=0\\ 3\log_{0,5}(2x) & \text{при} \quad 0<x\le 2\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2\sin(6x-1)+1}{\cos^3(2x+3)}\right)^3;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=3t^2+t\\ y=e^{-2+2t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(x\text{-}2)^{\sin x+3}$;   б) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\text{-}3y^4+2$;

4. Вычислить приближенно

$(2.001)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x+4}$;   б) $Z(t)=2\ln\left(\dfrac{t}{t\text{-}4}\right)\text{-}3$.

Вариант №22

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{a-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{-x^2}$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3-x} & \text{при} \quad -5\le x\le -3 \\ \dfrac{3}{2x}+2 & \text{при} \quad -3<x<0 \\ 2tg\left(\dfrac{x}{4}\right) & \text{при} \quad 0\le x<2\pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2x}{\cos^3(2x-3)-3}\right)^4;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 2

$$\begin{cases} x=t^2+t \\ y=e^{-2+2t} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1\text{-}2x^3\right)^{\sin x+3}$; б) $\dfrac{x}{2x-1}-\sin^2(y)-3y+2=0$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2-x^2}{x+4}$; б) $F(s)=\text{-}(s+1)\cdot e^{(s+2)}$.

Вариант №23

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{3-x^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n-3)^{20}+(2n-1)^{10}}{3n^{20}-2n^4-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+3x^2-2x}$ при a_1=0, a_2=-2, a_3= -1, $a_4=+\infty$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x)*,

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{при} \quad x\le -1 \\ \dfrac{2}{x}-2 & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 1-\cos(3x) & \text{при} \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\sqrt{2-\frac{2}{\arcsin(x-2^{3x})}}+4\cos(2-\sqrt{3})\,;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при t = 1

$$\begin{cases} x=2t^2-t \\ y=\ln(3t-2) \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1\text{-}\lg(2x)\right)^{4x}$; *б)* $x\cdot \operatorname{arctg}(2x)-4x\sin(3y)+y=1$;

4. Вычислить приближенно

arctg(1.05) *;*

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{-x^2}{x^2-9}$; *б)* $K(h)=\dfrac{e^{h+3}}{h+3}$.

Вариант №24

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{-2x}+3x^3-20\cdot lg(13x)-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x^{10}-x}\ +\ 0{,}8^x-(2x-3)^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-7x^3+6x^2}{3x^2-4x+1}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to0+} (1+sin(3x))^{\frac{-3}{x}}$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x)*,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+4} & \text{при}\quad -5<x\le-2\\ 1+(x-2)^2 & \text{при}\quad -2<x<0\\ 2\,ln(x+1) & \text{при}\quad x\ge0\end{cases},$$ построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=cos((3x-2)^2)\cdot(cos^6(2x)+3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3x-2}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=2-t^2\\ y=e^{t-1}+3t^3\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^{3x-2}$; *б)* $x\cdot arctg(3x+1)-2x^2\sqrt[3]{y+1}=3$;

4. Вычислить приближенно

$\cos121^{\circ}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{4-x^2}{x+3}$; *б)* $D(s)=ln\left(\dfrac{s}{s+5}\right)$-1.

Вариант №25

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot(\sqrt{n^2-4}-\sqrt{n^2+3n}\ )\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-3}\right)^{-5x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{4x^2-6x+2}{4x^4-4x^3}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases} 3\sqrt{2x+10} & \text{при } -5\le x\le -1 \\ 2\sin(x+1) & \text{при } -1<x<\pi-1 \\ \dfrac{-3}{x-\pi} & \text{при } 0\le x\le 2\pi,\ x\ne\pi \\ 2 & \text{при } x=\pi \end{cases},$$ построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\log_3(x-arctg(x\cdot 2^{3x}))\ ;$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases} x=3t-2t^2 \\ y=t+3t^3 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(4x^2\text{-}6\right)^x$; б) $\dfrac{\sin(2x)}{x}+\sqrt{\dfrac{3}{y\text{-}1}}+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$$(2{,}02)^{-3}\ ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+3}$; б) $F(c)=\text{-}(2c+3)\cdot e^{2(c+2)}$.

Вариант №26

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{sin(x)-sin(3)}{6-2x}$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{6x^3-2x^2+4x}{x^2+4x+4}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, a_4=$-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-3}\right)^{x^2-2x}$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x)*,

$$f(x)=\begin{cases} ctg(x) & \text{при} \quad x<-3, x\neq \pi\cdot n \\ 3 & \text{при} \quad x<-3, x=\pi\cdot n \\ \dfrac{1}{2x-2} & \text{при} \quad -3<x<0 \\ x & \text{при} \quad 0\le x\le 4 \end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{2\cdot(2x-1)^3}{\sqrt{1-x}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases} x=3t^2+1 \\ y=t^2+t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^2-2\right)^{4x\text{-}1}$; *б)* $ln\left(\dfrac{x}{x\text{-}1}\right)\text{-}y\cdot cos(3y)+x=1$;

4. Вычислить приближенно

$$\sqrt[3]{-64{,}2}$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2+1}{x+3}$; *б)* $J(t)=-\dfrac{e^{-2(t-1)}}{2(1-t)}$.

Вариант №27

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{sin^3(2x)+3\cdot e^{2x}-3}{tg\left(\frac{2}{x}\right)-x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x^2+5x-7}{x^3-5x^2-6x}$ при a_1=0, a_2=1, a_3= -1, $a_4=-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4x+10}{4x-3}\right)^{3+x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{при} \quad x\le -3 \\ \dfrac{2}{x+3} & \text{при} \quad -3<x<0 \\ \dfrac{|x-3|}{x-3} & \text{при} \quad 0\le x\le 5,\ x\ne 3 \\ 2 & \text{при} \quad x=3 \end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x^3+3)\cdot tg(x^2)}{1+e^{3x-2}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=2$

$$\begin{cases} x=3-4t^3 \\ y=e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(1\text{-}2x^3\right)^{sin\,x+1}$; б) $(x\cdot sin(x)+1)\cdot(y^3-3y)+x=1$;

4. Вычислить приближенно

$(1{,}95)^{10}$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{4-x^2}{x+4}$; б) $Y(p)=ln\left(\dfrac{p\text{-}5}{p}\right)+2$.

Вариант №28

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+k}}{6+2n}$;

2) $\lim\limits_{x\to0-0}(1+6x)^{\frac{2}{sin(2x)}}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-4x^2}{3x^2-4x+1}$ при a_1=0, a_2=2, a_3= -1, a_4=$-\infty$.

№2 Найти область определения функции *y=f(x),*

$$f(x)=\begin{cases}2(x+3)^2 & \text{при} \quad -4\le x\le -2\\ \dfrac{-2}{(x+2)^2} & \text{при} \quad -2<x<0\\ \dfrac{1}{2x+1} & \text{при} \quad x\ge 0\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{3\cdot(x-x^2)+\arcsin(\sqrt{2}-1)}{x^3-4};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=-1$

$$\begin{cases}x=t^3+3\\ y=2^{2t+2}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(x-1)^{x-5x^2}$; б) $3tg(2x)\cdot\ln(2x)-\sqrt{y^3-3y}+3=1$;

4. Вычислить приближенно

$\cos44^o$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-4x}{3-x}$; б) $G(t)=(t+4)\cdot e^{-(t+3)}$.

Вариант №29

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot(\sqrt{x^2-3p}-\sqrt{x^2+1}\ )\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-5x-6}{5x^2+x-6}$ при a_1=6, a_2=1, a_3= -1, a_4=$-\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{-x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)^2 & \text{при} \quad -5<x\le -1\\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{при} \quad -1<x<0\\ 3\sin(2x-1) & \text{при} \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{3}+1\end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{(x+1)^{10}-arctg(2x)}{2-e^{3x}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2-2t\\ y=t^5-3t\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=\left(x^3-3\right)^{lg\,3x+1}$; б) $\cos\left(\dfrac{2x}{x\text{-}1}\right)\cdot y^3-2y+1=0$;

4. Вычислить приближенно

$4^{0,98}$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{0,5\cdot x^2}{x+4}$; б) $F(h)=\dfrac{e^{h\text{-}3}}{h-3}$.

Вариант №30

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-8x}{3x^2-4x+4}$ при $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $a_4=-\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{sin\left(\frac{1}{2x}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos(x)-2}{x^2-x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{(x+3)^2} & \text{при} \quad -6<x\le -3\\ (2x+4)^2 & \text{при} \quad -3<x\le 0\\ 2+tg\left(\dfrac{x}{4}\right) & \text{при} \quad 0<x\le 2\pi\end{cases}$$

, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\frac{2\sin(4x-1)}{\cos^3(x+3)-2}\right)^2;$$

2.. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases}x=t^2+t\\ y=e^{-2+3t}\end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x)=(2x-2)^{sin(2x)+3}$; б) $x-3\cos^6(2x)+x\cdot y^6-y=0$

4. Вычислить приближенно

$(4.001)^3$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4}$; б) $A(y)=ln\left(\dfrac{y+6}{y}\right)-1$.

2.

2.2 Пример решения части 1

Вариант №31

№1 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x+1}\right)^{3-2x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x^2+5)\cdot(\ln(x+8)-\ln(x-1))\Big)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}$ при a_1=1, a_2=0, a_3= 3, a_4= $-\infty$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{при} \quad -5\le x\le -1 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^3}+5 & \text{при} \quad -1<x<0 \\ 1+2\cos(2x) & \text{при} \quad 0\le x<\pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x)=\frac{tg^3 2x\cdot\ln 5x}{\sin 5x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx}, составить уравнения касательной и нормали при $t=\dfrac{\pi}{2}$ для $\begin{cases} x=\cos t \\ y=t^2+3t \end{cases}$;

3. Найти производную функции

 а) $f(x)=(3+\sin x)^{4x+2}$; б) $2x^5-3xy^3-2y^4-1=0$;

4. Вычислить приближенно

 $\cos 59^o$;

5. Провести полное исследование функции и построить график

 а) $y(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$; б) $S(t)=(3-t)\cdot e^{t-2}$.

№1 Вычислить пределы

1.1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x+1}\right)^{3-2x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{3-2x^2}=\left[\begin{array}{c}1^{\infty}\\ \text{применим } 2^{\text{й}}\\ \text{замечательный предел}\end{array}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x+1)+2}{3x+1}\right)^{3-2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{3-2x^2}=\left[\begin{array}{c}\alpha=\dfrac{2}{3x+1}\\ \alpha\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\\ \text{выделим в показателе } \dfrac{1}{\alpha}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}\cdot\frac{2}{3x+1}\cdot(3-2x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}}\right)^{\frac{2}{3x+1}\cdot(3-2x^2)}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{2}}\right)\right\}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3x+1}\cdot(3-2x^2)}=\left[\lim_{\alpha\to o}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\right]=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3x+1}\cdot(3-2x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6-4x^2}{3x+1}}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{6-4x^2}{3x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty\\ e^{-\infty}=0\end{array}\right]=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{3-2x^2}=0;$$

1.2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x^2+5)\cdot(ln(x+8)-ln(x-1))\Big).$

Решение:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x^2+5)\cdot(ln(x+8)-ln(x-1))\Big)=\begin{bmatrix}\text{Свойство}\\ \text{логарифма}\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^2+5)\cdot ln\left(\frac{x+8}{x-1}\right)\right)=$$

$$=\left[\frac{x+8}{x-1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^2+5)\cdot ln\left(\frac{x-1+9}{x-1}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^2+5)\cdot ln\left(1+\frac{9}{x-1}\right)\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{9}{x-1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\\ ln(1+\alpha)\underset{x\to 0}{\sim}\alpha\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x^2+5)\cdot\frac{9}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cdot\frac{x^2+5}{x-1}\right)=+\infty.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\Big((x^2+5)\cdot(ln(x+8)-ln(x-1))\Big)$=0;

1.3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}$ при a_1=1, a_2=0, a_3= 3, a_4= $-\infty$.

Решение: 1.3.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}=\dfrac{2-5-3}{1+2-15}=\dfrac{-6}{-12}=0{,}5;$

1.3.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}=\left[\dfrac{0+0-3}{0+0+0}=\dfrac{-3}{0}\right]=\infty;$

1.3.3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}=\left[\dfrac{18-15-3}{27+18-45}=\dfrac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}x=3\ -\text{корень}\\ \text{числителя и знаменателя}\\ \text{разложим их на множители}\end{bmatrix}=$

$$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2\cdot(x-3)\cdot(x+0{,}5)}{x\cdot(x-3)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2\cdot(x+0{,}5)}{x\cdot(x+5)}=\frac{2\cdot 3+1}{3\cdot(3+5)}=\frac{7}{24};$$

1.3.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+2x^2-15x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\text{ , разделим дробь на } x^3\right]=$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1+2\cdot\frac{1}{x}-15\cdot\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{2\cdot 0-5\cdot 0-3\cdot 0}{1+2\cdot 0-15\cdot 0}=0.$$

Можно вычислить предел частного двух многочленов из условия, что наибольшая степень дроби находится в знаменателе. Такой предел на бесконечности равен нулю.

Ответ: 1) 0,5; 2) ∞; 3) $\dfrac{7}{24}$; 4) 0.

№2 Найти область определения функции *y=f(x)*,

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{при} \quad -5 \le x \le -1 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^3}+5 & \text{при} \quad -1 < x < 0 \\ 1+2\cos(2x) & \text{при} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$, построить её график.

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

Решение :

2.1) Значения функции *f(x)* можно вычислить при $x \in [-5;-1]$, $x \in (-1;0)$, $x \in [0;\pi]$. Функция *f(x)* на каждом участке области определения задана (нет точек, в которых невозможно вычислить *f(x)*), объединение всех участков даёт для функции *f(x)* область определения $D_f = [-5;\pi]$ т.к. $[-5;-1] \cup (-1;0) \cup [0;\pi] = [-5;\pi]$;

2.2) Построим график функции, построив графики

- $y_1 = x-3$ при $x \in [-5;-1]$,
- $y_2 = \dfrac{-2}{(x+1)^3}+5$ при $x \in (-1;0)$,
- $y_3=1+2\cos(2x)$ при $x \in [0;\pi]$.

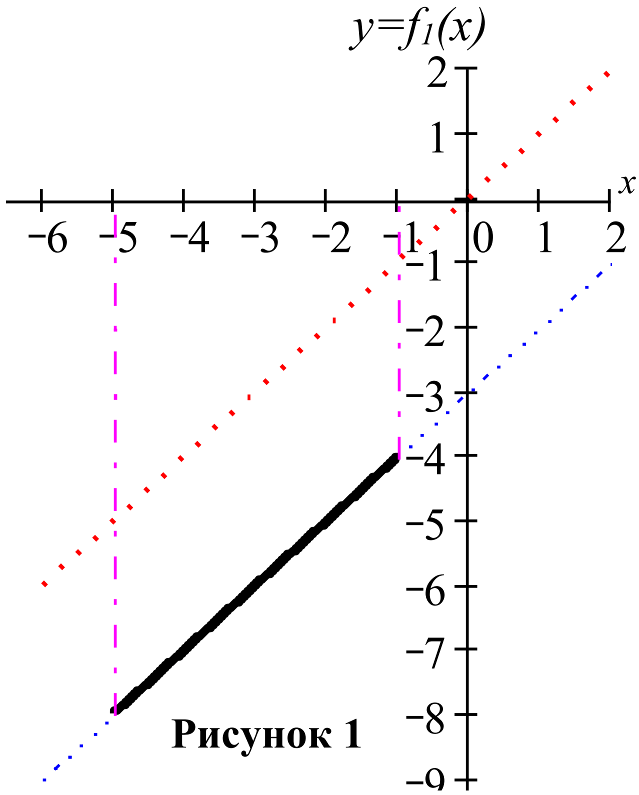


Рисунок 1

График $y_1 = x-3$ – прямая, с угловым коэффициентом *k*=1 и сдвигом вниз относительно начала координат на *b*=3. Прямую можно построить и по двум точкам:

а) взять x_1 и вычислить $y(x_1)$, например при *x*= -5 *y*(-5)= -5 -3= -8;

б) взять x_2 и вычислить $y(x_2)$, например при *x*= -1 *y*(-1)= -1 -3= -4;

в) построить прямую по найденным точкам (-5; -8) и (-1; -4).

График функции изобразим на промежутке $x \in [-5;-1]$, на котором задана функция y_1.

График функции $y_1 = x-3$ показан на рисунке 1.

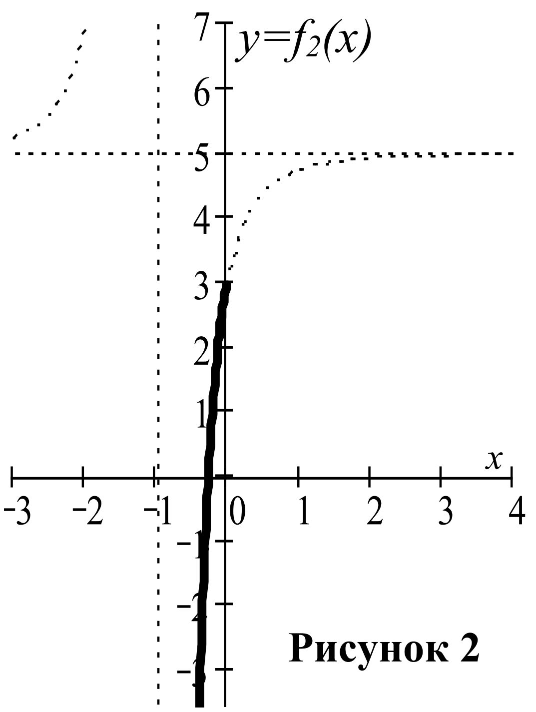


Рисунок 2

График $y_2 = \dfrac{-2}{(x+1)^3} + 5$ – гипербола, получаемая из $y = \dfrac{1}{x^3}$ растяжением в 2 раза вдоль оси OY вместе с переворотом относительно OX, сдвигом влево на 1 и вверх на 5 единиц.

Функция $y_2(x)$ задана на интервале $x \in (-1;0)$.

График $y = f_2(x)$ показан на рисунке 2.

График $y_3 = 2\cos(2x) + 1$ получается из графика $y = \cos(x)$ сжатием в 2 раза вдоль оси OX, растяжением в 2 раза вдоль оси OY и сдвигом вверх на 1 единицу. График $y = f_3(x)$ показан на рисунке 3.

Функция $f_3(x)$ задана на отрезке $x \in [0;\pi]$.

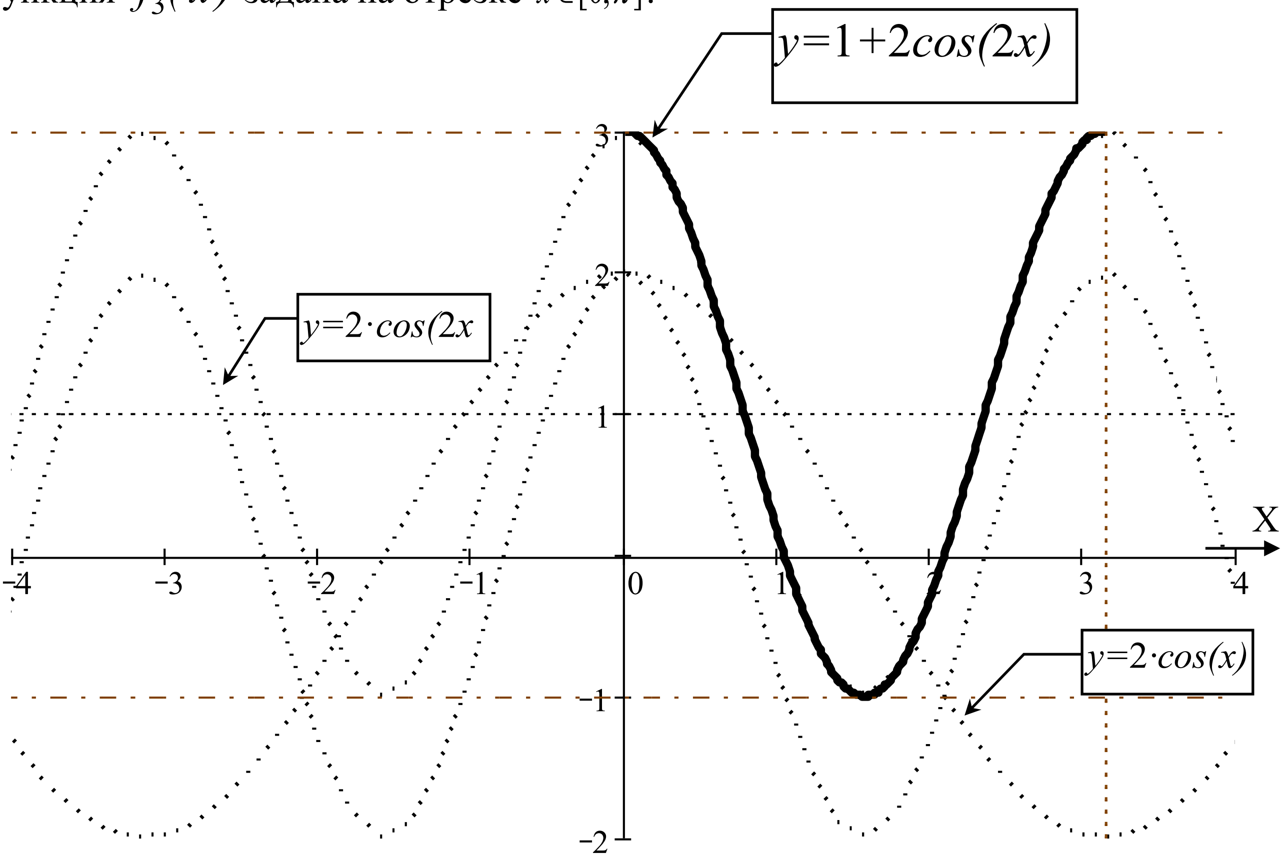


Рисунок 3

2.3) Исследуем функцию *f(x)* на непрерывность.

Функция $y_1 = x - 3$ задана на отрезке $x \in [-5; -1]$. Функция $y_1(x)$ является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции в точках соответствующего интервала (-5; -1).

Функция $y_2 = \dfrac{-2}{(x+1)^3} + 5$ задана на интервале $x \in (-1;0)$, в его точках функция $y_2(x)$ является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции.

Функция $y_3 = 1 + 2 \cdot cos(2x)$ задана на отрезке $x \in [0; \pi]$. Функция $y_3(x)$ является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции. в точках соответствующего интервала $(0; \pi)$.

Вывод: Разрывы функции *f(x)* возможны только на границах участков области определения.

Рассмотрим каждую из границ области определения $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$.

2.3.1) $x = -5$, $f(-5) = \left|1^я \text{ строка}\right| = -5 - 3 = -8$.

Функция *f(x)* задана только при $x \geq -5$,

предел справа $\lim\limits_{x \to -5+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -5+0} (x - 3) = -5 - 3 = -8$ существует, конечен и равен $f(-5)$ т.е *f(x)* в точке x=-5 непрерывна справа;

2.3.2) $x = -1$, $f(-1) = \left|1^я \text{ строка}\right| = -1 - 3 = -4$.

Предел слева $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \left[1^я \text{ строка}\right] = \lim\limits_{x \to -1-0} (x - 3) = -1 - 3 = -4$,

предел справа $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \left[2^я \text{ строка}\right] = \lim\limits_{x \to -1+0} \left(\dfrac{-2}{(x+1)^3} + 5 \right) = [-\infty + 5] = -\infty$.

Среди частичных пределов в точке x= -1 имеется бесконечный, x= -1 является точкой разрыва второго рода;

2.3.3) x=0, $f(0) = \left|3^я \text{ строка}\right| = 1 + 2 \cdot cos(0) = 1 = 2 = 3$.

Предел слева $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \left[2^я \text{ строка}\right] = \lim\limits_{x \to 0-0} \left(\dfrac{-2}{(x+1)^3} + 5 \right) = \dfrac{-2}{1} + 5 = 3$,

предел справа $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \left[3^я \text{ строка}\right] = \lim\limits_{x \to 0+0} (1 + 2cos(2x)) = 1 + 2cos(0) = 3$.

В точке x=0 частичные пределы совпадают и равны значению функции в такой точке, следовательно x=0 – точка непрерывности функции *f(x)*;

2.3.4) $x = \pi$, $f(\pi) = \left|3^я \text{ строка}\right| = 1 + 2cos(2 \cdot \pi) = 1 + 2 = 3$.

Функция *f(x)* задана только при $x \leq \pi$, предел слева $\lim\limits_{x \to \pi - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi - 0} \left(1 + 2\cos(2x)\right) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ существует, конечен и равен $f(\pi)$ т.е $f(x)$ в точке $x = \pi$ непрерывна слева.

С учётом выполненных пунктов построим график функции $f(x)$.
График изображён на рисунке 4.

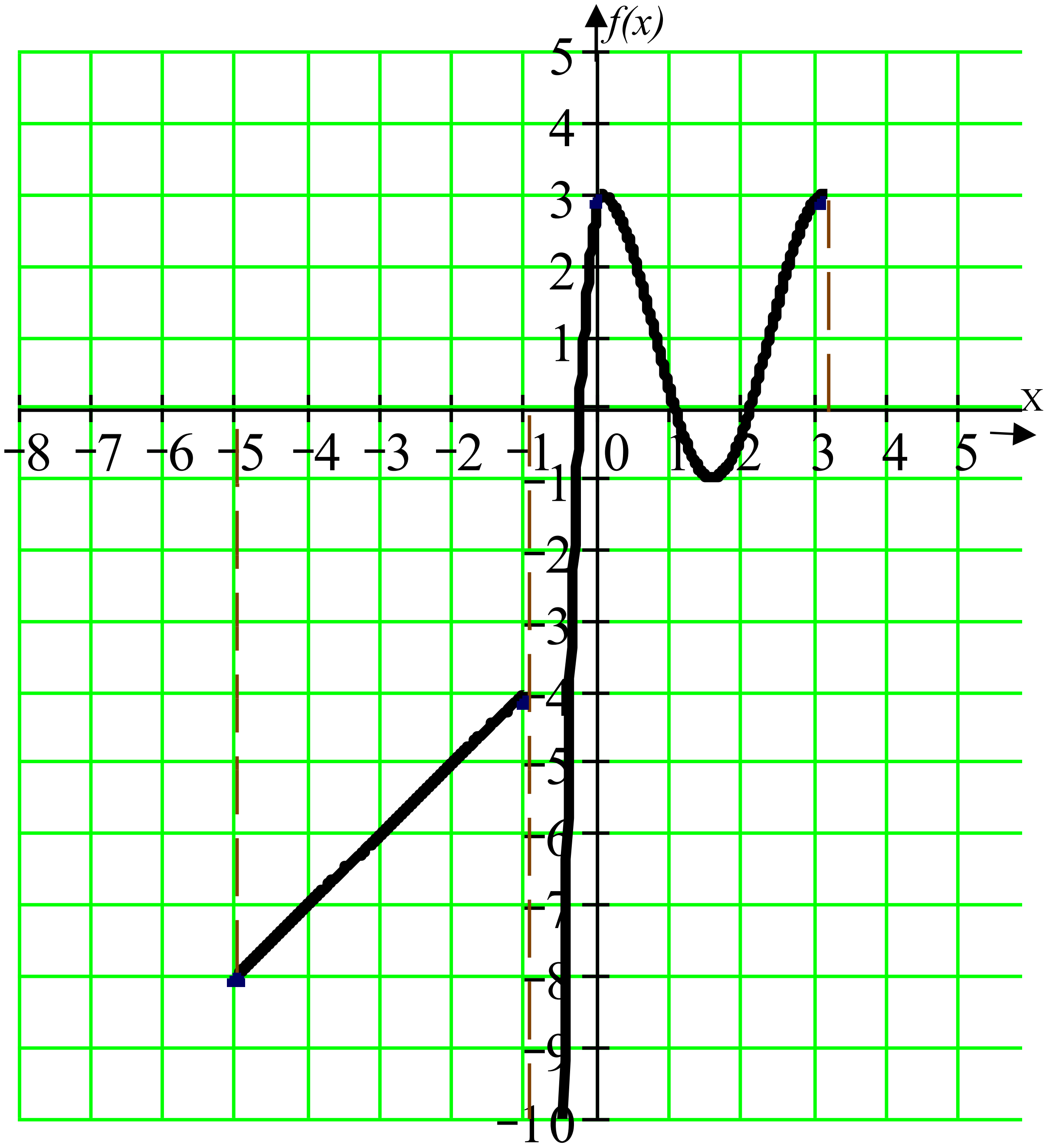


Рисунок 4

№3

3.1) Найти производную функции $f(x)=\dfrac{tg^3 2x\cdot ln5x}{sin5x}$.

Решение:

$$f'(x)=\left(\frac{tg^3 2x\cdot ln5x}{sin5x}\right)'=\frac{(tg^3 2x\cdot ln5x)'\cdot sin5x-(tg^3 2x\cdot ln5x)\cdot(sin5x)'}{sin^2 5x}=$$

$$=\frac{\left(\left(3tg^2 2x\cdot\dfrac{1}{cos^2 2x}\cdot(-sin2x)\cdot 2\right)\cdot ln5x+tg^3 2x\cdot\dfrac{1}{5x}\cdot 5\right)\cdot sin5x-(tg^3 2x\cdot ln5x)\cdot cos\ 5x\cdot 5}{sin^2 5x}=$$

$$=\frac{(-6\dfrac{sin^3 2x}{cos^4 2x}\cdot ln5x+\dfrac{tg^3 2x}{x})\cdot sin5x-5tg^3 2x\cdot ln5x\cdot cos\ 5x}{sin^2 5x};$$

Ответ: $f'(x)==\dfrac{(-6\dfrac{sin^3 2x}{cos^4 2x}\cdot ln5x+\dfrac{tg^3 2x}{x})\cdot sin5x-5tg^3 2x\cdot ln5x\cdot cos\ 5x}{sin^2 5x}$.

3.2) Найти y'_x и y''_{xx}, составить уравнения касательной и нормали при $t=\dfrac{\pi}{2}$ для $\begin{cases}x=cos\,t\\ y=t^2+3t\end{cases}$;

Решение:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(t^2+3t)'}{(cos\,t)'}=\frac{2t+3}{-sin\,t},$$

$$y''_{xx}=(y'_x)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\left(\frac{2t+3}{-sin\,t}\right)'\cdot\frac{1}{-sin\,t}=\frac{2\cdot(-sin\,t)-(2t+3)\cdot(-cos\,t)}{-sin^3 t}=$$

$$=\frac{2\,sin\,t-(2t+3)\cdot cos\,t}{sin^3 t}.$$

При $t=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad y'_x=\dfrac{\pi+3}{-1}=-\pi-3\approx-6{,}14$, $\quad y''_{xx}=\dfrac{2}{1}=2$,

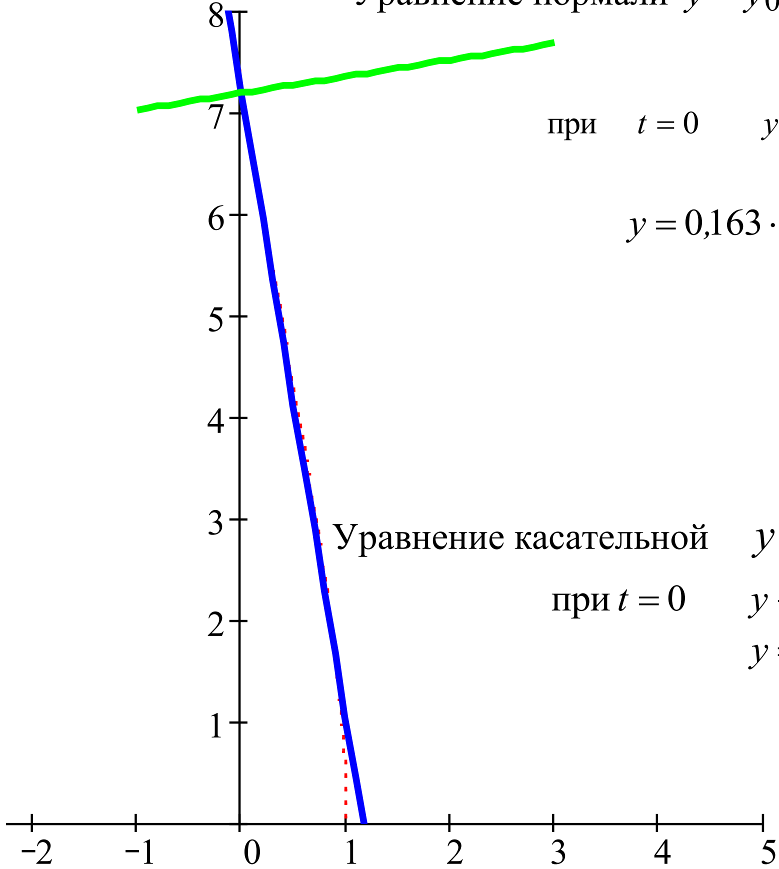
$$x_0=x\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$y_0=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{3\pi}{2}\approx 7{,}18.$$

Уравнение нормали $y - y_0 = \dfrac{-1}{y'_x(t_0)} \cdot (x - x_0)$,

при $t = 0$ $\quad y - 7{,}18 = \dfrac{-1}{-6{,}14} \cdot (x - 0)$,

$y = 0{,}163 \cdot x + 7{,}18$.



Уравнение касательной $y - y_0 = y'_x(t_0) \cdot (x - x_0)$,

при $t = 0$ $\quad y - 7{,}18 = -6{,}14 \cdot (x - 0)$,

$y = -6{,}14x + 7{,}18$.

Рисунок 5

Ответ: При t=0 $\quad y'_x = -\pi - 3,\ \ y''_{xx} = 2$, касательная $y = -6{,}14x + 7{,}18$,

нормаль $y = 0{,}163 \cdot x + 7{,}18$;

3.3) Найти производную функции

а) $f(x)=(3+\sin x)^{4x+2}$; **б)** $2x^5-3xy^3-2y^4-1=0$.

Решение:

а) $f(x)=(3+\sin x)^{4x+2}$.

Используем логарифмическое дифференцирование:

$$f'(x)=f(x)\cdot(\ln f(x))' = (3+\sin x)^{4x+2}\cdot\left(\ln(3+\sin x)^{4x+2}\right)' =$$
$$=(3+\sin x)^{4x+2}\cdot\left(\left(4x+2\right)\cdot\ln(3+\sin x)\right)' =$$
$$=(3+\sin x)^{4x+2}\cdot\left(4\cdot\ln(3+\sin x)+(4x+2)\cdot\frac{\cos x}{3+\sin x}\right),$$

$$f'(x)=4\cdot(3+\sin x)^{4x+2}\cdot\ln(3+\sin x)+(4x+2)\cdot\left((3+\sin x)^{4x+1}\cdot\cos x\right);$$

б) $2x^5-3xy^3-2y^4-1=0$.

Уравнение неявно задает функцию $y=y(x)$, из него может быть найдена производная $y'=\dfrac{dy}{dx}$. Продифференцируем обе части уравнения по переменной x, учитывая производную сложной функции $\left(f(y)\right)'_x=f'(y)\cdot y'$. При этом получим уравнение $2\cdot 5x^4-3\cdot(1\cdot y^3+x\cdot 3y^2\cdot y')-2\cdot 4y^3\cdot y'-0=0$.

Сгруппируем слагаемые, содержащие y' и перенесём остальные слагаемые в правую часть равенства $y'\cdot(3x\cdot y^2-8y^3)=-10x^4+3y^3$,

из чего получаем $y'=\dfrac{-10x^4+3y^3}{3x\cdot y^2-8y^3}$.

Ответ: а) $f'(x)=4\cdot(3+\sin x)^{4x+2}\cdot\ln(3+\sin x)+(4x+2)\cdot\left((3+\sin x)^{4x+1}\cdot\cos x\right)$,

б) $y'=\dfrac{-10x^4+3y^3}{3x\cdot y^2-8y^3}$.

3.4) Вычислить приближенно $cos\,59^o$.

Решение:

Пусть $f(x)=cos(x),\quad x=\dfrac{\pi\cdot 59}{180}$ (перевели градусы в радианы).

Для такой функции $f'(x)=-sin(x)$.

Формула приближенных вычислений $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$.

(по первому приближению)

Возьмём $x_0=\dfrac{\pi}{3},\quad \Delta x=x-x_0=\dfrac{-\pi}{180}$,

тогда $cos\,59^o\approx cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(-sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)\cdot\left(-\dfrac{\pi}{180}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}$,

$cos\,59^o\approx 0{,}5+0{,}015=0{,}515$.

(Калькулятор дает значение 0,515038074);

Ответ: 0,515.

3.5) Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$; б) $S(t)=(3-t)\cdot e^{t-2}$.

Решение:

а) $y(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$.

1) Область определения и область непрерывности :

Область определения функции $D_y=\{\ x\ |\ x\in R\ ,\ x\neq 1\ \}$.

Область непрерывности совпадает с областью определения, т.к. *y(x)* является алгебраической функцией.

При x=1 функция не определена, $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\dfrac{2x^2}{x-1}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{2x^2}{x-1}\right)=+\infty$,

т.е. x=1 для функции является точкой разрыва второго рода;

2) Четность: $y(-x)=\dfrac{2x^2}{-x-1}$,

$y(-x)\neq y(x)\ \Rightarrow$ нет чётности, нет симметрии относительно оси OY ;

$y(-x)\neq -y(x)\ \Rightarrow$ нет нечётности, нет симметрии относительно начала координат.

Вывод: функция *общего вида.*

Функция *y(x)* не периодическая;

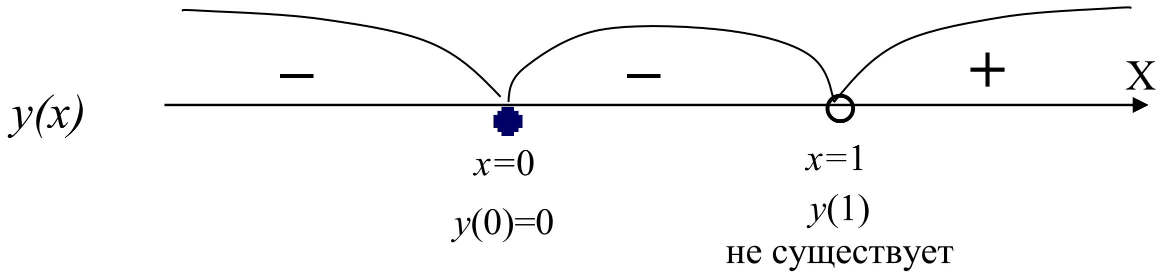
3) Пересечение с осями и знаки функции:

а) с ОУ т.е. при x=0 y(0)=0 , пересечение с осью ОУ в точке (0; 0).

б) с осью ОХ т.е. находим решение уравнения y(x)=0,

$y(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}=0$ при x=0, пересечение с осью ОХ в точке (0; 0);

Располагая по возрастанию на числовой прямой точки пересечения графика с осью ОХ и точки, где y(x) не существует, получим три промежутка. Определим знак функции в точках каждого промежутка и получим



4) Асимптоты графика:

а) Вертикальные вида $x=a$ (если хотя бы один частичный предел функции при $x\to a\pm 0$ бесконечен).

При x=1 имеется бесконечный частичный предел

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}\right)=+\infty$$ (в данном случае оба)

и в других точках функция $y(x)$ ограничена т.к. непрерывна.

Вертикальная асимптота x=1 (единственная);

б) Горизонтальные вида y=A (если предел функции при $x\to\pm\infty$ существует, конечен и равен А).

Пределы $$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}\right)=+\infty$$ оба бесконечные,

горизонтальных асимптот нет;

в) Наклонные асимптоты , вида $y_1=k_1\cdot x+b_1$ и $y_2=k_2\cdot x+b_2$.

Замечание: Если имеется правая (левая) горизонтальная асимптоты, то соответствующая наклонная асимптоты можно не искать.

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x(x\text{-}1)}\right)=2$$ совпадают,

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x\text{-}1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=2\ .$$

Правая и левая асимптота совпадают,
уравнение наклонной асимптоты $y=2x+2$;

5) Производная функции:

$$y'(x)=\left(\frac{2x^2}{x-1}\right)'=2\cdot\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}.$$

Критические точки производной:

а) $y'(x)=0$ при $2x^2-4x=0$, $x_1=0$ и $x_2=2$;
б) $y'(x)$ не существует при $x=1$.

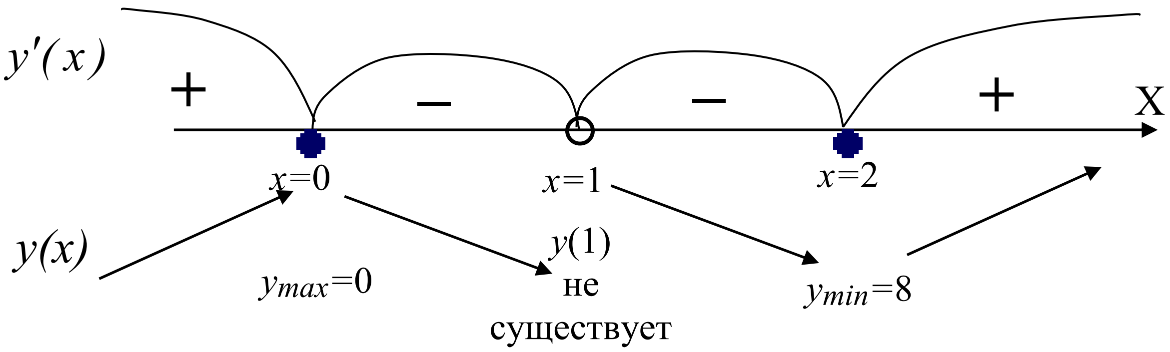
Промежутки монотонности функции:

Знаки производной на каждом промежутке можно определить непосредственной подстановкой значений $x=x_j$ из каждого промежутка знакопостоянства производной (из области определения функции). Можно находить знак производной *методом интервалов:* производная раскладывается на множители и при переходе через критическую точку $x=x_j$ обращается внимание на чётность (нечётность) степени множителя $(x-x_i)^{k_j}$ в выражении производной. Если степень k_j чётная, то знак производной при переходе через её критическую точку не изменяется, знак изменяется при нечётной степени .

Разложив производную на множители, получим $y'(x)=\dfrac{2x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$.

Значения производной на самом правом промежутке ($x>2$) положительные, имеют знак “ + “ т.к. $y'(3)=\dfrac{6}{4}>0$.

- При переходе через $x=2$ знак производной изменится на “ – “, т.к. множитель производной ($x–2$) участвует в нечётной (первой) степени;
- При переходе через $x=1$ знак производной не изменится, т.к. множитель производной ($x–1$) участвует в чётной (второй) степени;
- При переходе через $x=0$ знак производной изменится на “+“, т.к. множитель производной ($x–0$) участвует в нечётной (первой) степени.



Вывод: функция возрастает при $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$,
убывает при $x\in(0;1)\cup(1;2)$;

Точки экстремума:

1. x=0 *является* точкой экстремума, причём **максимума**, т.к. в ней функция непрерывна и производная меняет знак с плюса на минус, y (0)=0;
2. x=1 *не является* точкой экстремума, т.к. в ней функция не определена;
3. x=2 *является* точкой экстремума, причём **минимума**, т.к. в ней функция непрерывна и производная меняет знак с минуса на плюс, y (2) = 8;

6) Вторая производная:

$$y''(x)=\left(\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(4x-4)\cdot(x-1)^2-(2x^2-4x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{4\cdot(x-1)\cdot(x-1)-4(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{4}{(x-1)^3}\ .$$

Критические точки второй производной:

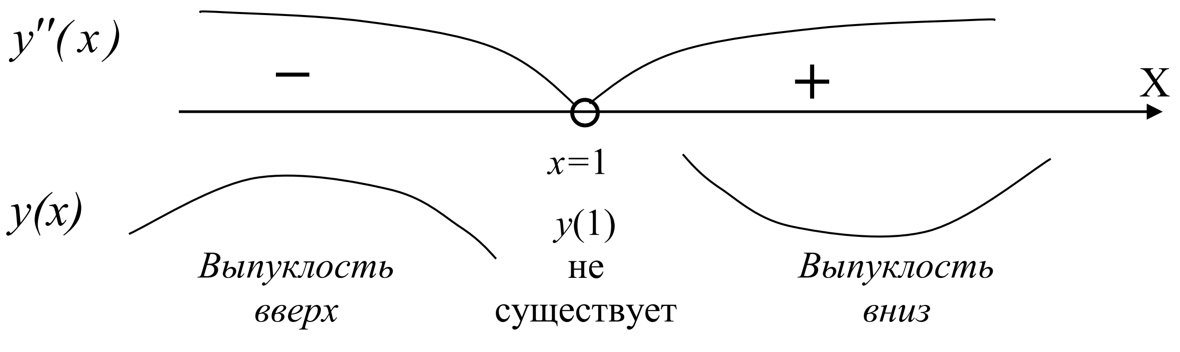
а) $y''(x)=0$ не имеет решения ;

б) $y''(x)$ не существует при $x=1$.

Промежутки выпуклости графика:

Определим знак второй производной на каждом промежутке её знакопостоянства (из области определения функции) :

- Знак $y''(x)$ на самом правом промежутке x>1 "+ " т.к. $y''(2)=4>0$ т.е. на
- При переходе через x=1 знак производной изменится на " – ", т.к. (x – 1) участвует во второй производной в нечётной (третьей) степени т.е на таком промежутке график функции выпуклый (выпуклый вверх);



Точки перегиба:

а) x=1 *не является* точкой перегиба, т.к. в ней функция не задана и разрывная;

б) Других критических точек второй производной нет.

Точек перегиба нет;

6) Для построения графика функции возьмём несколько вспомогательных точек из области определения функции: y(-3)= -9, y(0,5)= -1, y(4)=10+2/3.

С учётом результатов всех пунктов плана получим график функции, изображенный на рисунке 6.

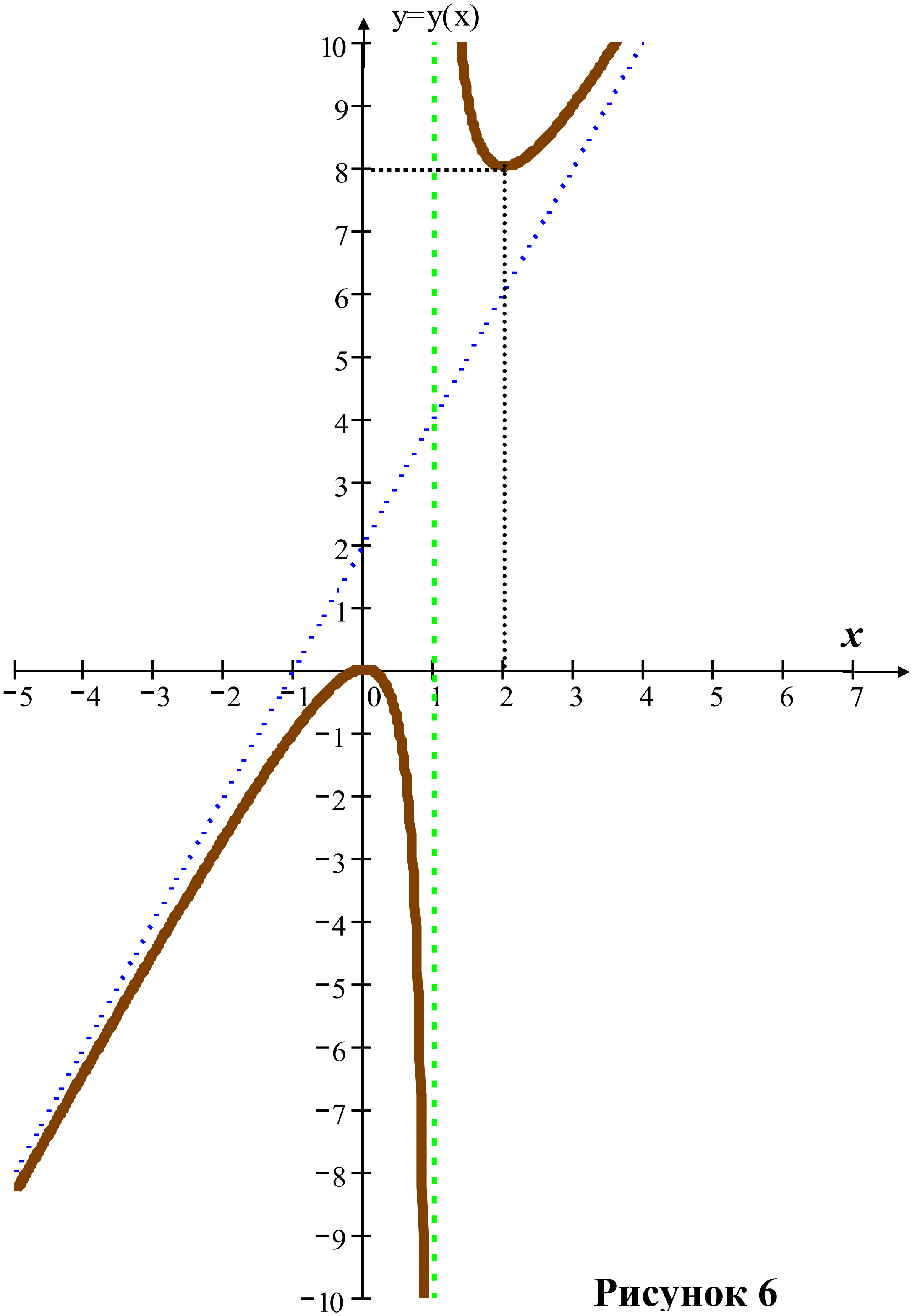


Рисунок 6

№5.(б) Провести полное исследование функции $S(t)=(3-t)\cdot e^{t-2}$ и построить график.

Решение:

1) Область определения и область непрерывности:

Функция определена на всей числовой прямой $D_S=\{\,t|\ t\in\mathbf{R}\}$.

Функция является элементарной т.е. её область непрерывности совпадает с областью определения. Точек разрыва нет;

2) Четность:

$S(-t)=(3+t)\cdot e^{-t-2}$, $S(-t)\neq S(t)$ и $S(-t)\neq -S(t)$,

функция *общего вида*.

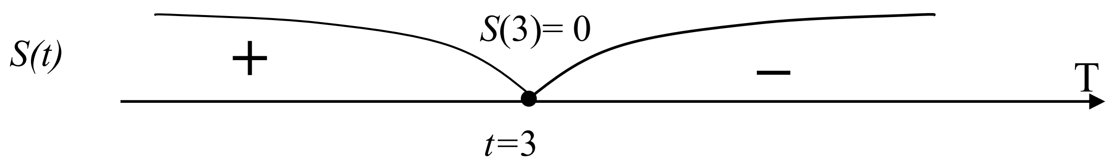
Функция *S(t)* *не периодическая*;

3) Пересечение с осями:

а) с осью OS: при t=0 $S=(3-0)\cdot e^{0-2}=3e^{-2}\approx 0{,}4$ и точка пересечения (0; 0,4) ;

б) с осью OT: $(3-t)\cdot e^{t-2}=0$, его решение t=3 и точка пересечения (3; 0);

Знаки функции



4) Асимптоты графика:

а) Вертикальных асимптот нет. т.к. функция на любом отрезке непрерывна, следовательно, ограниченная;

б) Горизонтальные асимптоты

$$\lim_{t\to-\infty}(S(t)) = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{3-t}{e^{2-t}}\right)=\left[\frac{+\infty}{e^{+\infty}}\right]=0,$$ левая горизонтальная асимптота S=0; (ось OT)

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(S(t)\Big) = \lim_{t\to+\infty}\Big((3-t)\cdot e^{t-2}\Big)=-\infty,$$ правой горизонтальной асимптоты нет;

в) Наклонные

Слева (при $t\to-\infty$) не ищем т.к. имеется горизонтальная асимптота.

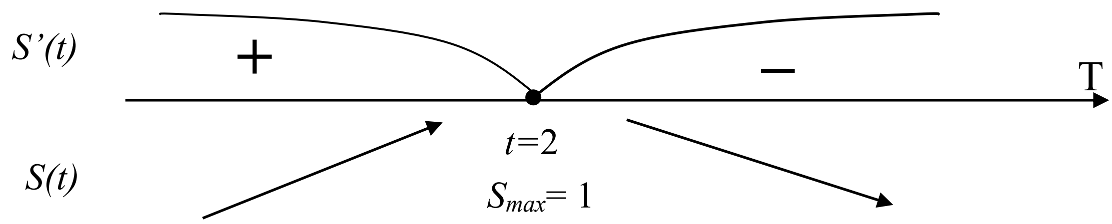
Справа $S=k\cdot t+b$, $$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3-t}{t}\cdot e^{t-2}\right)=-\infty.$$

Наклонных асимптот нет;

5) Производная $S'(t) = -1 \cdot e^{t-2} + (3-t) \cdot e^{t-2} = e^{t-2} \cdot (2-t)$.

$S'(t) = 0$ при t=2 и других критических точек производной нет.

Знаки производной:



$S'(0) = e^0 \cdot (2-0) = 2 = 1 > 0$; $S(2) = (3-2) \cdot e^0 = 1$; $S'(3) = e^1 \cdot (2-3) \approx -2{,}71 < 0$.

7) Вторая производная:

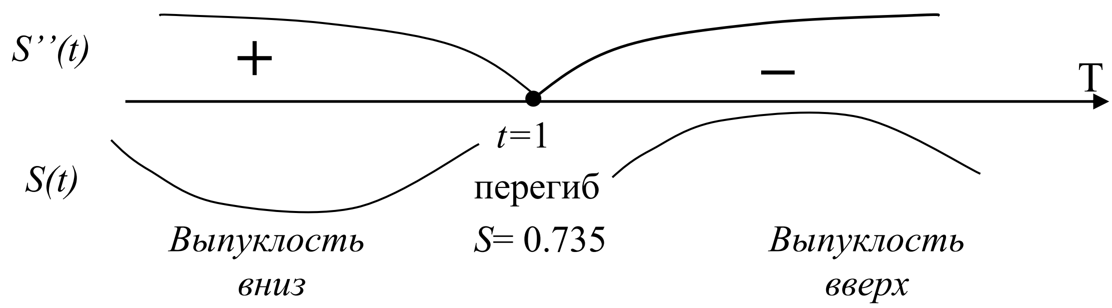
$S''(t) = e^{t-2} \cdot (2-t) + e^{t-2} \cdot (-1) = e^{t-2} \cdot (1-t)$,

а) $S''(t) = 0$ при $1 - t = 0$, $t = 1$;

б) $S''(t)$ существует при любом t,

(других критических точек второй производной нет).

Знаки второй производной:



$S''(0) = e^{-2} \cdot (1-0) = e^{-2} > 0$; $S(1) = (3-1) \cdot e^{1-2} \approx 0{,}735$; $S''(3) = e^1 \cdot (1-3) \approx -5{,}42 < 0$.

Точка t=1 является точкой перегиба графика функции;

8) График функции:

Для построения графика функции возьмём несколько вспомогательных точек из области определения функции:

$S(-1) = (3+1) \cdot e^{-3} \approx 0{,}2$,

$S(4) = (3-4) \cdot e^2 \approx -7{,}4$.

С учётом результатов всех пунктов плана получим график, изображенный на рисунке 7.

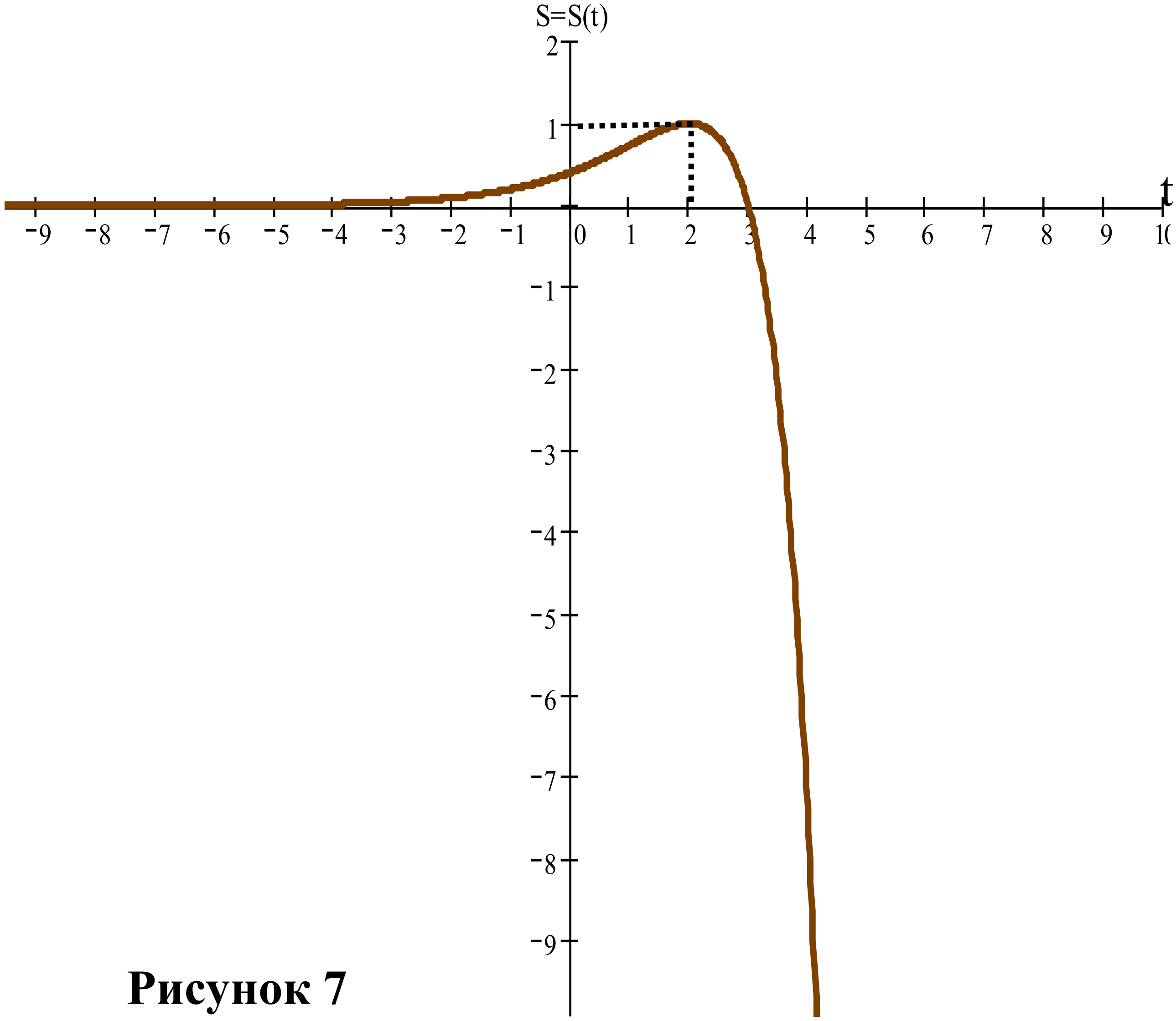


Рисунок 7

Дз-2 часть 2 Домашняя контрольная работа
по теме «Интегрирование»
выдаётся на13 неделе, сдача на 18 неделе 2 семестра

№4 (5 баллов) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1. $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$.
2. $y = x\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 3)$.
3. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
4. $y = \sin x \cos^2 x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.
5. $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
6. $y = x^2\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.
7. $y = \cos x \sin^2 x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.
8. $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.
9. $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.
10. $y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$.
11. $y = (x+1)^2$, $y^2 = x + 1$.
12. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.
13. $y = x\sqrt{36-x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 6)$.
14. $x = \arccos y$, $x = 0$, $y = 0$.
15. $y = x \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.
16. $y = x^2\sqrt{8-x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2})$.
17. $x = \sqrt{e^y - 1}$, $x = 0$, $y = \ln 2$.

18. $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

19. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.

20. $y = \frac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$.

21. $x = (y-2)^3$, $x = 4y - 8$.

22. $y = \cos^5 x \sin 2x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

23. $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.

24. $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$.

25. $x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e^3$.

26. $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.

27. $y = x^2\sqrt{16-x^2}$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.

28. $x = \sqrt{4-y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

29. $y = (x-1)^2$, $y^2 = x - 1$.

30. $y = x^2 \cos x$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

31. $x = 4 - (y-1)^2$, $x = y^2 - 4y + 3$.

№5 (5 баллов) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2$ $(x \geqslant 2)$.

2. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 2$ $(y \geqslant 2)$.

3. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 4$ $(0 < x < 8\pi,\ y \geqslant 4)$.

4. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 2$ $(x \geqslant 2)$.

5. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$
$y = 3$ $(y \geqslant 3)$.

6. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3$ $(0 < x < 4\pi,\ y \geqslant 3)$.

7. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 6\sqrt{3}$ $(x \geqslant 6\sqrt{3})$.

8. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$
$y = \sqrt{3}$ $(y \geqslant \sqrt{3})$.

9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3$ $(0 < x < 6\pi,\ y \geqslant 3)$.

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4$ $(x \geqslant 4)$.

11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 3$ $(y \geqslant 3)$.

12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 9$ $(0 < x < 12\pi,\ y \geqslant 9)$.

13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$
$x = 4$ $(x \geqslant 4)$.

14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$
$y = 4$ $(y \geqslant 4)$.

15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 6$ $(0 < x < 12\pi,\ y \geqslant 6)$.

16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 3\sqrt{3}$ $(x \geqslant 3\sqrt{3})$.

17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2\sqrt{3}$ $(y \geqslant 2\sqrt{3})$.

18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 15$ $(0 < x < 20\pi,\ y \geqslant 15)$.

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1$ $(x \geqslant 1)$.

20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y = 4$ $(y \geqslant 4)$.

21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$
$y = 1$ $(0 < x < 2\pi,\ y \geqslant 1)$.

22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 1$ $(x \geqslant 1)$.

23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$
$y = 2$ $(y \geqslant 2)$.

№6 (5 баллов) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в полярной системе координат

1. $r=4\cos 3\varphi$, $r=2$ $(r\geqslant 2)$.
2. $r=\cos 2\varphi$.
3. $r=\sqrt{3}\cos\varphi$, $r=\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.
4. $r=4\sin 3\varphi$, $r=2$ $(r\geqslant 2)$.
5. $r=2\cos\varphi$, $r=2\sqrt{3}\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.
6. $r=\sin 3\varphi$.
7. $r=6\sin 3\varphi$, $r=3$ $(r\geqslant 3)$.
8. $r=\cos 3\varphi$.
9. $r=\cos\varphi$, $r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)$ $(-\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.
10. $r=\sin\varphi$, $r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/4)$.
11. $r=6\cos 3\varphi$, $r=3$ $(r\geqslant 3)$.
12. $r=\frac{1}{2}+\sin\varphi$.
13. $r=\cos\varphi$, $r=\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$.
14. $r=\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)$, $r=\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4)$ $(\pi/4\leqslant\varphi\leqslant 3\pi/4)$.
15. $r=\cos\varphi$, $r=2\cos\varphi$.
16. $r=\sin\varphi$, $r=2\sin\varphi$.
17. $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$.
18. $r=\frac{1}{2}+\cos\varphi$.
19. $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.
20. $r=\frac{5}{2}\sin\varphi$, $r=\frac{3}{2}\sin\varphi$.
21. $r=\frac{3}{2}\cos\varphi$, $r=\frac{5}{2}\cos\varphi$.
22. $r=4\cos 4\varphi$.
23. $r=\sin 6\varphi$.
24. $r=2\cos\varphi$, $r=3\cos\varphi$.
25. $r=\cos\varphi+\sin\varphi$.
26. $r=2\sin 4\varphi$.
27. $r=2\cos 6\varphi$.
28. $r=\cos\varphi-\sin\varphi$.
29. $r=3\sin\varphi$, $r=5\sin\varphi$.
30. $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.
31. $r=6\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

№7 (5 баллов) Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции. В вариантах 1 – 16 ось вращения OX, а в вариантах 17 – 32 ось вращения OY.

1. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.

2. $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$.

3. $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

4. $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \geqslant 0$.

5. $y = \sin^2 x$, $x = \pi/2$, $y = 0$.

6. $x = \sqrt[3]{y-2}$, $x = 1$, $y = 1$.

7. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

8. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$.

9. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

10. $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

11. $y = x^2$, $y^2 - x = 0$.

12. $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

13. $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{y-2}$, $x = 1$.

14. $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$.

15. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

16. $y = \sin \frac{\pi x}{2}$, $y = x^2$.

17. $y = \arccos \frac{x}{3}$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

18. $y = \arcsin \frac{x}{5}$, $y = \arcsin x$, $y = \frac{\pi}{2}$.

19. $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

20. $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

21. $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0{,}5$.

22. $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$.

23. $y = (x-1)^2$, $y = 1$.

24. $y^2 = x - 2$, $y = 0$, $y = x^3$, $y = 1$.

25. $y = x^3$, $y = x^2$.

26. $y = \arccos \frac{x}{5}$, $y = \arccos \frac{x}{3}$, $y = 0$.

27. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

28. $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$.

29. $y = x^3$, $y = x$.

30. $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $x = 0$.

31. $y = (x-1)^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

3 Методика оценки достижений

3.1 Для оценки достижений студента используется

***бально-рейтинговая система*:**

- В *каждом семестре* студент должен выполнить домашнюю контрольную работу из двух частей. После её проверки студент получает баллы (рейтинг)

Код	**Вид оценочного средства**	**Максимальный балл**	**Зачтённая работа, баллы**	**Незачёт, баллы**
Дз-2 Часть 1	Домашняя контрольная работа (ДКР)	20	11– 20	0 – 10
Дз-2 Часть 2	ДКР	20	11– 20	0 – 10
Э-2	Экзамен	60	26 – 60	0 – 25

- Допуском до экзамена является 25 баллов при зачтённой *каждой части* контрольной работы. При недопуске студент исправляет ошибки в своей работе либо выполняет дополнительные задания для набора не менее 25 баллов;
- На экзамене в каждом билете имеется по 6 практических задач, каждая оценивается по 10 баллов, на их выполнение даётся 2 часа. Допускается использование дополнительной литературы. Для получения оценок 4 и 5 требуется ответить на несколько теоретических вопросов без применения литературы;
- При наборе на экзамене менее 26 баллов экзамен является несданным и выставляется неудовлетворительная оценка (независимо от набранных в семестре баллов);
- Оценкой за семестр является общий суммарный рейтинг в виде суммы баллов, накопленных за семестр, и полученных на экзамене. Оценка выставляется при наборе не менее 60 баллов с указанием этой суммы и соответствующей оценки.

Оценка по 5 бальной шкале	**Зачет**	**Сумма баллов по дисциплине**	**Оценка (ECTS)**	**Градация**
5 (отлично)	Зачтено	90-100	**A**	Отлично
4 (хорошо)		85-89	**B**	Очень хорошо
		75-84	**C**	Хорошо
		70-74	**D**	Удовлетворительно
3 (удовлетворительно)		65-69		
		60-64	**E**	Посредственно
2 (неудовлетворительно)	Не зачтено	Ниже 60	**F**	Неудовлетворительно

3.2 Вопросы экзамена

1. Определение числовой последовательности и ее предела. Свойства пределов последовательности.
2. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимообратных функций. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.
3. Преобразования, влияющие на график функции (f(x)+c, f(x+c), c·f(x), f(c·x), $|f(x)|$, $f(|x-c|)$). Графики линейной, параболической, дробно-линейной функции и $y=A\cdot\sin(w\cdot x+w_0)$.
4. Определение предела функции в точке. Бесконечный предел и предел на бесконечности. Свойства пределов.
5. Бесконечно малая функция (БМ). Сравнение БМ: эквивалентность, символ "о". Первый замечательный предел, его применение. Основные эквивалентности БМ в пределах.
6. Бесконечно большая функция (ББ). Сравнение ББ: эквивалентность, символ "о". Шкала ББ при $x\to\infty$, её применение.
7. Связь БМ, ББ и других функций. Основные виды неопределенностей в пределах, способы их раскрытия. Второй замечательный предел, правило его применения.
8. Непрерывность функции в точке. Частичные пределы, их связь с непрерывностью. Точки разрыва функции, их классификация.
9. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства непрерывных в точке функций.
10. Свойства непрерывных на отрезке функций: сохранение знака, ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, поиск корня f(x)=0 методом половинного деления, промежуточные значения.

11. Производная функции f(x): определение, геометрический смысл с уравнением касательной и нормали, физический смысл. Свойства производных.
12. Производные основных функций (x^n, a^n, $ln(x)$, $sin(x)$, $cos(x)$) с доказательствами.
13. Приращение дифференцируемой функции, понятие дифференциала и его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы дифференциала, его применение в приближенных вычислениях.
14. Производная обратной функции. Вывести производные *arcsin(x), arctg(x).* Производная неявно заданной функции.
15. Логарифмическое дифференцирование. Понятие гиперболических функций, их производные.
16. Свойства дифференцируемых на отрезке функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
17. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, её коэффициенты и остаточный член в формах Пеано и Лагранжа.

18. вывести разложения sin(x), cos(x), e^x, ln(1+x), $(1+x)^n$ по формуле Маклорена.
19. Производные $y_x'(x)$, $y_{xx}''(x)$ для функции, заданной параметрически.
20. Определение точки экстремума. Связь монотонности функции и знака ее производной. Теорема Ферма (необходимое условие точек экстремума). Достаточные условия экстремума:
    a) с помощью знака первой производной;
    b) с помощью производных старших порядков.
21. Алгоритм нахождения точек экстремума. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, примеры задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.
22. Определение выпуклой (вогнутой) НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ. Связь выпуклости со знаком второй производной. Алгоритм нахождения точек перегиба.
23. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределах.
24. Понятие асимптоты графика функций, их виды и способы нахождения.
25. Общий план исследования функций и построения графика функции.
26. Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на ОТРЕЗКЕ.
27. Решение текстовых задач на оптимизацию.

28. Определение первообразной для $f(x)$ на [a; b], теорема о двух первообразных. Неопределенный интеграл (НИ), его свойства. Таблица основных интегралов.
29. Определенный интеграл (ОИ) для $f(x)$, как предел интегральных сумм, его основные свойства, теорема о среднем.
30. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной.
31. Формула Ньютона-Лейбница и её применение.
32. Замена переменной в НИ и ОИ.Интегрирование по частям в НИ, ОИ, основные случаи.
33. Вычисление некоторых НИ методом неопределенных коэффициентов.
34. Дробно-рациональная функция, алгоритм ее разложения на сумму элементарных дробей:
    а) выделение целой части, алгоритм "деление столбиком";
    б) разложение многочлена на неприводимые множители, кратность корня;
    в) метод неопределенных коэффициентов разложения на элементарные дроби.
35. Интегралы от элементарных дробей. Общий план интегрирования дробно-рациональных функций.
36. Интегралы от тригонометрических функций; Основные случаи и способы интегрирования данных интегралов.

37. Интегралы от иррациональных функций. Примеры "неберущихся" интегралов.
38. Нахождение площади криволинейной трапеции и площадей плоских фигур с помощью ОИ (ограниченных $y_i=f_i(x)$; параметрических заданными).
39. Площадь криволинейного сектора. Нахождение площади фигуры в полярных координатах.
40. Объем тела по поперечным сечениям. Объем тела вращения с помощью ОИ.

3.3 ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Новоуральский технологический институт

Кафедра высшей математики

Направление подготовки – 15.03.05 - "Конструкторско- технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Профиль – «Технология машиностроения» (**КМ-15з**)

Квалификация (степень) выпускника – академический бакалавр

Форма обучения – Заочная

Дисциплина – **МАТЕМАТИКА, 2 СЕМЕСТР**

Экзаменационный билет №1

1) Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cdot sin^2(3x)}{arcsin(2x)\cdot(1-cos(x))}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+7}\right)^{5x^2-x}$.

2) Найти производные функций

а) $S(p)=p^2\cdot e^{3p-1}$; б) $x(y)=\dfrac{y^3}{3y-12}+ln(3+\sqrt{2})$;

3) Исследовать на асимптоты график функции $f(x)=\dfrac{x\cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{x^2-9}$;

4) Найти $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2+4x-12}dx$;

5) Вычислить площадь, ограниченную кривой $\rho(\varphi)=4\,sin^2(\phi)$.

Составил: ______________________________ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: ______________________________Носырев Н.А.

05.06.2016

Новоуральск

4 Справочник

- Если $\alpha = \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ (бесконечно малая функция, БМ),

$\beta = \beta(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ (БМ),

$\varphi = \varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$ (бесконечно большая функция, ББ),

$\psi = \psi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$ (ББ),

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A \neq 0$,

то

1) При сравнении бесконечно малых вычисляется предел их частного и, в зависимости от результата

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{cases} 1, & \text{тогда } \alpha \text{ и } \beta \text{ эквивалентны } \alpha \underset{x \to x_0}{\sim} \beta \\ C \neq 0, & \text{тогда } \alpha \text{ и } \beta \text{ имеют один порядок малости } \alpha \underset{x \to x_0}{\sim} C \cdot \beta \\ 0, & \text{тогда числитель имеет больший порядок малости } \alpha = o(\beta) \\ \infty, & \text{тогда знаменатель имеет больший порядок малости } \beta = o(\alpha) \end{cases}$$

- При сравнении бесконечно больших вычисляется предел их частного и, в зависимости от результата

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \begin{cases} 1, & \text{тогда } \varphi \text{ и } \psi \text{ эквивалентны } \varphi \underset{x \to x_0}{\sim} \psi \\ C \neq 0, & \text{тогда } \varphi \text{ и } \psi \text{ имеют один порядок роста } \varphi \underset{x \to x_0}{\sim} C \cdot \psi \\ 0, & \text{тогда знаменатель имеет больший порядок роста } \psi = O(\varphi) \\ \infty, & \text{тогда числитель имеет больший порядок роста } \varphi = O(\psi) \end{cases}$$

.

- При арифметических действиях без неопределённости

- $c\cdot\alpha \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ *с тем же* порядкоммалости)
- $\alpha \pm \beta \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ *с наименьшим* из порядков малости слагаемых)
- $\alpha \cdot \beta \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ с порядком малости *выше,* чем у каждого из сомножителей)
- $c\cdot\varphi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ с тем же порядком роста)
- $\varphi \pm \psi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ с наибольшим из порядков роста слагаемых)
- $\varphi \cdot \psi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ с порядком роста выше, чем у каждого из сомножителей)
- $\dfrac{1}{\alpha} \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ)
- $\dfrac{1}{\varphi} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ)
- $\alpha \pm \varphi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ)
- $f(x) \pm \alpha \xrightarrow[x\to x_0]{} A$
- $f(x)\cdot \alpha \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (БМ)
- $f(x) \pm \varphi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ)
- $f(x)\cdot \varphi \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ (ББ)

- Виды неопределённостей в пределах:

- $\dfrac{\alpha}{\beta}$ $\left[\dfrac{o}{o}\right]$;
- $\dfrac{\varphi}{\psi}$ $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$;
- $\alpha\cdot\varphi$ $[o\cdot\infty]$;
- $\varphi-\psi$ $[\infty-\infty]$; при одинаковом порядке роста
- $(1+\alpha)^{\varphi}$ $\left[1^{\infty}\right]$. с помощью 2го замечательного предела

- **Основные эквивалентности в пределах:**

$$sin(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} arcsin(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} tg(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} arctg(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \alpha,$$

$$1-cos(\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \frac{\alpha^2}{2}, \quad ln(1+\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \alpha, \quad log_a(1+\alpha) \underset{\alpha\to o}{\sim} \frac{1}{ln(a)}\cdot\alpha,$$

$$\left(e^{\alpha}-1\right) \underset{\alpha\to o}{\sim} \alpha, \quad \left((1+\alpha)^m-1\right) \underset{\alpha\to o}{\sim} m\cdot\alpha.$$

Если бесконечно малую (бесконечно большую) функцию в выражении заменить на эквивалентную, то предел выражения *не изменится*.

- **Шкала бесконечно больших функций:**

при $x \to +\infty$

• $log_a(x)$ $(a>1)$	….. $lg(x)$ $ln(x)$ $log_2(x)$ ……
• x^n	…. $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt{x}$ x x^2 x^3 ….
• a^x $(a>1)$	…. 2^x e^x 10^x ….
• $n!$ ($x!$ при $x \in \mathbf{N}$)	
• x^x $x>1$ • x^{x^2} $x>1$ …………..	

Стоящие ниже функции имеют **больший** порядок роста.
Среди основных элементарных функций наименьший порядок роста имеет логарифмическая функция (с ростом её основания порядок роста уменьшается) и наибольший порядок роста имеет показательная функция (с ростом её основания порядок роста возрастает).

- **Виды точек разрыва:**

- $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \Rightarrow x=x_0$ – точка непрерывности для $f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq f(x_0) \Rightarrow x=x_0$ – точка разрыва для $f(x)$ *нулевого* рода (восполнимый разрыв);
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\text{A (конечное)} \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\text{B (конечное)} \end{array}\right\} \text{A} \neq \text{B} \Rightarrow x=x_0$ – точка разрыва для $f(x)$ *первого* рода (конечный скачок);
- Если хотя бы один из частичных пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

бесконечен, то $x = x_o$ – точка разрыва *второго* рода (существенный разрыв).

- Производная функции в точке x_o

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_o} = f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{\Delta x\to o} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right);$$

- Геометрически $y'(x_o)$ равна угловому коэффициенту касательной в соответствующей точке графика, в декартовых координатах $y'(x_o) = tg(\alpha)$, α – угол наклона касательной к графику функции в точке $(x_o;\ y(x_o))$;
- Уравнение касательной $y - y_o = y'(x_o)\cdot(x - x_o)$;
- Уравнение нормали $y - yo = \dfrac{-1}{y'(x_o)}\cdot(x - x_o)$;
- Производная произведения $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$**;**
- Производная дроби $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$**;**
- Логарифмическая производная $\left((u(x))^{v(x)}\right)' = u^{v}\cdot\left(v'\cdot ln(u) + v\cdot\dfrac{u'}{u}\right)$,

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(\ ln(f(x))\ \right)';$$

- Дифференциал функции $\left. df\right|_{x=x_o} = f'(x_o)\cdot(x - x_o) = f'(x_o)\cdot dx$;
- Дифференциал второго порядка $\left. d^2 f\right|_{x=x_o} = f''(x_o)\cdot(dx)^2$;
- Для функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\end{cases}$

производная y по x $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=t_o} = \dfrac{y'(t_o)}{x'(t_o)}$, $\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=t_o} = \left.\left(\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)'\cdot\dfrac{1}{x'(t)}\right)\right|_{t=t_o}$;

- Формула Тейлора $\Delta f(x) \approx \dfrac{df}{1!} + \dfrac{d^2 f}{2!} + \ldots. + \dfrac{d^n f}{n!}$,

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}\cdot(x - x_o)}_{\text{первое приближение}} + \frac{f''(x_o)}{2!}\cdot(x - x_o)^2 + \ldots. + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\cdot(x - x_o)^n;$$

• Таблица производных

Функции	Производные
• $(f(x))^n$	$n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
• $a^{f(x)}$	$a^{f(x)}\cdot ln(a)\cdot f'(x)$
$e^{u(x)}$	$e^{u(x)}\cdot u'(x)$
e^{x^2}	$e^{x^2}\cdot 2x$
2^x	$2^x\cdot ln(2)$
• $log_a(f(x))$	$\frac{1}{f(x)\cdot ln(a)}\cdot f'(x)$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$lg(x)$	$\frac{1}{x\cdot ln(10)}$
$sin(f(x))$	$cos(f(x))\cdot f'(x)$
$cos(f(x))$	$-sin(f(x))\cdot f'(x)$
$tg(f(x))$	$\frac{1}{cos^2(f(x))}\cdot f'(x)$
$ctg(f(x))$	$\frac{-1}{sin^2(f(x))}\cdot f'(x)$
$arcsin(f(x))$	$\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\cdot f'(x)$

$arccos(f(x))$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$
$arctg(f(x))$	$\dfrac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)$
$arctg(f(x))$	$\dfrac{-1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)$

- Функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ если $F'(x)=f(x)$;
- Если $F'(x)=f(x)$ то $\int f(x)dx=F(x)+C$;
- Таблица основных интегралов

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$	Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
x^n $n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	1	x
		$a\cdot g(x)\cdot g'(x)$	$a\cdot\frac{g^2(x)}{2}$
		$(ax+b)^k$	$\frac{(ax+b)^{k+1}}{a\cdot(k+1)}$
		$\frac{g'(x)}{\sqrt{a+g(x)}}$	$2\cdot\sqrt{a+g(x)}$
$a^{b\cdot x}$	$\frac{a^{b\cdot x}}{b\cdot ln(a)}$	$e^{b\cdot x}$	$\frac{e^{b\cdot x}}{b}$
		$2^{b\cdot x}$	$\frac{2^{b\cdot x}}{b\cdot\ln(2)}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}ln(ax+b)$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$ln(g(x))$
		$\frac{x+b}{(x+b)^2+a^2}$	$\frac{1}{2}\ln((x+b)^2+a^2)$
$\cos(b\cdot x)$	$\frac{sin(b\cdot x)}{b}$	$\cos^k(b\cdot x)\cdot\sin(bx)$	$\frac{-\cos^{k+1}(b\cdot x)}{b\cdot(k+1)}$
$sin(b\cdot x)$	$\frac{-\cos(b\cdot x)}{b}$	$\sin^k(bx)\cdot\cos(b\cdot x)$	$\frac{sin^{k+1}(b\cdot x)}{b\cdot(k+1)}$
$\frac{1}{cos^2(b\cdot x)}$	$\frac{1}{b}tg(bx)$	$\frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$	$tg(g(x))$

$\dfrac{1}{sin^2(b\cdot x)}$	$-\dfrac{1}{b}ctg(bx)$	$\dfrac{g'(x)}{\sin^2\left(g(x)\right)}$	$-ctg\left(g(x)\right)$
$tg(a\cdot x)$	$-\dfrac{1}{a}\cdot ln\,\lvert cos(a\cdot x)\rvert$	$ctg(a\cdot x)$	$\dfrac{1}{a}\cdot\ln\lvert\sin(a\cdot x)\rvert$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}arctg\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\dfrac{1}{(x+b)^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}arctg\left(\dfrac{x+b}{a}\right)$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}ln\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)$	$\dfrac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2\cdot a}ln\left(\dfrac{g(x)-a}{g(x)+a}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\dfrac{g'(x)}{\sqrt{a^2-g^2(x)}}$	$arcsin\left(\dfrac{g(x)}{a}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$	$\dfrac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x)\pm k}}$	$ln\left(g(x)+\sqrt{g^2(x)\pm k}\right)$
$sh(ax)$	$\dfrac{1}{a}ch(ax)$	$sh\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$	$\dfrac{1}{a}ch\left(u(x)\right)$
$ch(ax)$	$\dfrac{1}{a}sh(ax)$	$ch\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$	$\dfrac{1}{a}sh\left(u(x)\right)$
$\dfrac{1}{sh^2(ax)}$	$-\dfrac{1}{a}cth(ax)$	$\dfrac{g'(x)}{sh^2(g(x))}$	$-\dfrac{1}{a}cth(g(x))$
$\dfrac{1}{ch^2(ax)}$	$\dfrac{1}{a}th(ax)$	$\dfrac{g'(x)}{ch^2(g(x))}$	$\dfrac{1}{a}th(g(x))$

- Определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$;
- Замена переменной а)

$$\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)dx = \begin{bmatrix} \text{çàì åí à} \\ t=u(x) \end{bmatrix} = \int f(t)\cdot dt = F(t)+c = F\left(u(x)\right)+c\,;$$

б) $$\int\limits_a^b f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)dx = \begin{bmatrix} \text{çàì åí à} \\ t=u(x) \\ x_1=a \Rightarrow t_1=u(x_1) \\ x_2=b \Rightarrow t_2=u(x_2) \end{bmatrix} = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt = F(t)\Big|_{t_1}^{t_2}\,;$$

- Интегрирование по частям

$$a)\ \int u(x)\cdot v'(x)\cdot dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\cdot dx$$

$$\text{ò.å.}\ \int u dv = u\cdot v - \int v\cdot du;$$

$$\acute{a})\ \int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = \Big(u(x)\cdot v(x)\Big)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)dx$$

$$\text{ò.å.}\ \int\limits_a^b u\cdot dv = \Big(u\cdot v\Big)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\cdot du\ ;$$

- Разложение на элементарные дроби

а) $\dfrac{2x^4-4x^3+14x^2-17x+9}{(x-1)(x^2+4)}$ неправильная дробь,

выделение целой части и правильной дроби:

$$(x-1)(x^2+4) = x^3-x^2+4x-4,$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + 8x^2 - 9x - 15 & \underline{x^3 - x^2 + 4x - 4} \longleftarrow \textit{делитель} \\
\underline{2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x} & 2x + 1 \longleftarrow \textit{частное} \\
\qquad x^3 - x - 15 & \\
\qquad \underline{x^3 - x^2 + 4x - 4} & \\
\qquad\quad x^2 - 5x - 11 \longleftarrow \textit{остаток} &
\end{array}$$

$$2x^4-4x^3+14x^2-17x+9 = (2x+1)\cdot\Big(x^3-x^2+4x-4\Big)+x^2-5x-11$$

,

$$\frac{2x^4-4x^3+14x^2-17x+9}{(x-1)(x^2+4)} = 2x+1+\frac{x^2-5x-11}{(x-1)(x^2+4)};$$

б) $\dfrac{x^2-5x-11}{(x-1)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B\cdot x+C}{x^2+4},$

$$\frac{x^2-5x-11}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A\cdot\left(x^2+4\right)+\left(x-1\right)\cdot\left(B\cdot x+C\right)}{(x-1)(x^2+4)},$$

$$A\cdot\left(x^2+4\right)+\left(x-1\right)\cdot\left(B\cdot x+C\right)=x^2-5x-11$$

$$Ax^2+4A+Bx^2+Cx-Bx-C=x^2-5x-11,$$

$$\left(A+B\right)x^2+\left(C-B\right)x+\left(4A-C\right)=1\cdot x^2+(-5)\cdot x+(-11)$$

$$\begin{cases}A+B=1\\C-B=-5\\4A-C=-11\end{cases},\quad A=3,\ B=4,\ C=-1$$

$$\frac{x^2-5x-11}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{4\cdot x-1}{x^2+4},$$

$$\frac{2x^4-4x^3+14x^2-17x+9}{(x-1)(x^2+4)}=2x+1+\frac{-3}{x-1}+\frac{4\cdot x-1}{x^2+4};$$

- Примеры разложений правильной дроби (дробно-рациональной функции) на сумму элементарных дробей

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x+2)(x-5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{D}{x-5},$$

$$\frac{2x^2+x+7}{(x-1)^3\cdot(x+2)^2}=\left(\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{\left(x-1\right)^2}+\frac{A_3}{\left(x-1\right)^3}\right)+\left(\frac{A_4}{x+2}+\frac{A_5}{\left(x+2\right)^2}\right),$$

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(\underbrace{x^2+x+10}_{D<0})}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\cdot x+C}{x^2+x+10},$$

число коэффициентов каждый раз равно порядку многочлена в исходном знаменателе;

- Интегралы от элементарных дробей:

1) $\int\frac{3}{x-5}dx=ln\left(|\,x-5\,|\right)+c$;

2) $\displaystyle\int \frac{7}{(x-5)^3}dx = \frac{-7}{2(x-5)^2}+c$;

3) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+7^2}dx = \frac{5}{7}arctg\left(\frac{x}{7}\right)+c$;

4) $$\int \frac{3x+7}{x^2+2x+6}dx = \int \frac{3x+7}{\left(x^2+2x+1\right)-1+6}dx = \int \frac{3x+7}{(x+1)^2+5}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} замена \\ t = x+1, \\ x = t-1, \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{3(t-1)+7}{t^2+5}dt = \int \frac{3t+4}{t^2+5}dt =$$

$$= \int \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+5} + \frac{4}{t^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} \right)dt = \frac{3}{2}ln\,|\,t^2+5\,| + \frac{4}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)+c =$$

$$= \frac{3}{2}ln\,|\,x^2+2x+6\,| + \frac{4}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)+c;$$

5) Интеграл вида $J_n = \displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$ при $n \in \mathbb{N}$ находится по формуле

$$J_n = \frac{1}{2a^2\cdot(n-1)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot \boldsymbol{J_{n-1}}\ ;$$

- Интегрирование тригонометрических функций

Пусть $R(u,\, v)$-рациональное выражение от u, v.

Тогда

а) $\displaystyle\int R\left(cos(x),\, sin(x)\right)dx$ находится с помощью универсальной подстановки

$$t = tg\left(\frac{x}{2}\right),\ sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\cdot dt,$$

получим интеграл от дробно-рациональной функции;

б) $\int R\left(cos^2(x),\ sin^2(x)\right)dx$ или при чётности подынтегральной функции относительно синуса и косинуса находится с помощью подстановки

$$t = tg\left(x\right),\ sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{1}{1+t^2}\cdot dt;$$

в) $\int sin^m(x)\cdot cos^n(x)dx$

в.1) $m=1,\ n-$ любое$\Rightarrow$ замена $t=cos(x),\ \ sin(x)dx=-dt$;

в.2) $n=1,\ m-$ любое$\Rightarrow$ замена $t=sin(x),\ \ cos(x)dx=dt$;

в.3) m-нечётное положительное, $n-$ любое$\Rightarrow$ замена $t=cos(x),$

$$sin^5(x)\cdot cos^n(x)dx = sin^4(x)\cdot cos^n(x)\cdot sin(x)dx =$$

$$=\left(1-cos^2(x)\right)^2\cdot cos^n(x)\cdot sin(x)dx = \left(1-t^2\right)^2\cdot t^n\cdot\left(-dt\right);$$

n-нечётное положительное, $m-$ любое$\Rightarrow$ замена $t=sin(x),$

$$cos^7(x)\cdot sin^n(x)dx = cos^6(x)\cdot sin^n(x)\cdot cos(x)dx =$$

$$=\left(1-sin^2(x)\right)^3\cdot sin^n(x)\cdot cos(x)dx = \left(1-t^2\right)^3\cdot t^n\cdot dt;$$

в.5) $n,m-$ чётные положительные числа, тогда каждую степень понижают вдвое по формулам

$$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2},\quad sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2},$$

$$sin(x)\cdot cos(x) = \frac{1}{2}sin(2x);$$

г) При интегрировании произведения тригонометрических функций используются формулы

$$sin(\alpha)\cdot cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(sin\left(\alpha+\beta\right)+sin(\alpha-\beta)\right),$$

$$cos(\alpha)\cdot cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(cos\left(\alpha+\beta\right)+cos(\alpha-\beta)\right),$$

$$sin(\alpha)\cdot sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(cos\left(\alpha-\beta\right)-cos(\alpha+\beta)\right);$$

- Площадь фигуры в декартовых координатах:

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, прямыми $x = a$ слева, $x = b$ справа, и графиком функции $y = f(x)$ при условии $\forall x \in [a; b]$ $f(x) \geq 0$ $S_{\text{êðèâ.ò ðàï}} = \int_a^b f(x)dx$;

Если $\forall x \in [a; b]$ $f(x) \leq 0$, то $S_{\text{êðèâ.ò ðàï}} = -\int_a^b f(x)dx$;

б) Площадь между графиком $x = x(y)$ и осью OY

$$S_{\text{êðèâ.ò ðàï}} = \int_{y_1}^{y_2} x(y)dy$$

в) Если фигура ограничена в декартовых координатах графиком функции $y = f_1(x)$ снизу, графиком $y = f_2(x)$ сверху, вертикальными прямыми $x = a$ слева и $x = b$ справа, то

$$S_{\text{ô èã.}} = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx;$$

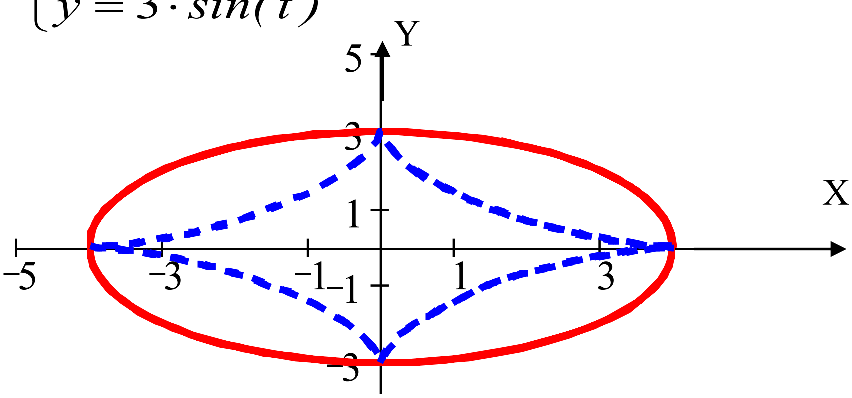
- Площадь между параметрически заданной линией $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

  при $t_1 \leq t \leq t_2$ и осями декартовой системы координат:

  г.1) С осью OX $\qquad S_x = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt \right|$;

  г.2) С осью OY $\qquad S_y = \left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y'(t)dt \right|$;

- Линия $\begin{cases} x = 4 \cdot cos(t) \\ y = 3 \cdot sin(t) \end{cases}$ является эллипсом с полуосями 4 и 3.

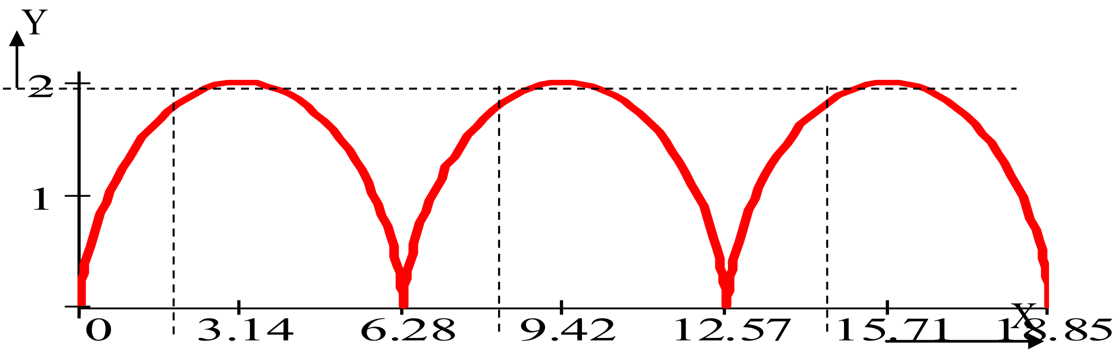


Справочник

- $\begin{cases} x = 4 \cdot cos^3(t) \\ y = 3 \cdot sin^3(t) \end{cases};$

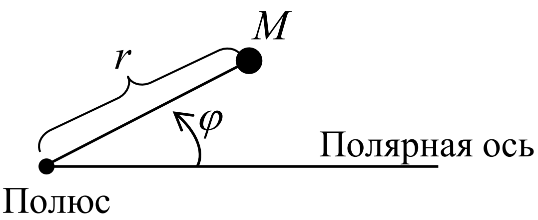
- Циклоида $\begin{cases} x = a\left(t - sin(t)\right) \\ y = a\left(1 - cos(t)\right) \end{cases}$ (заданная параметрически)

При a=1

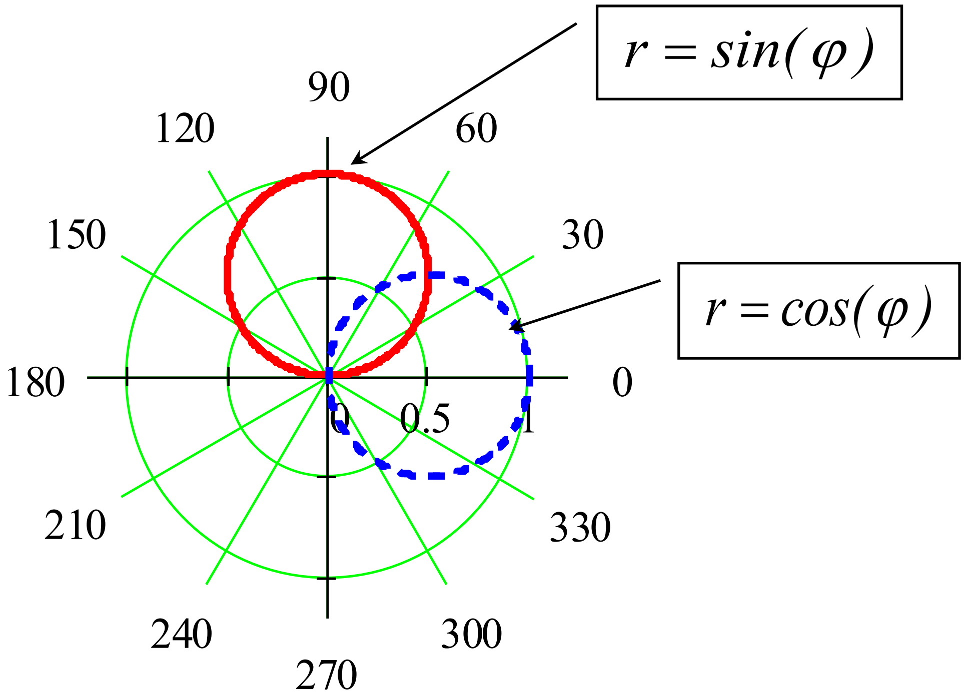


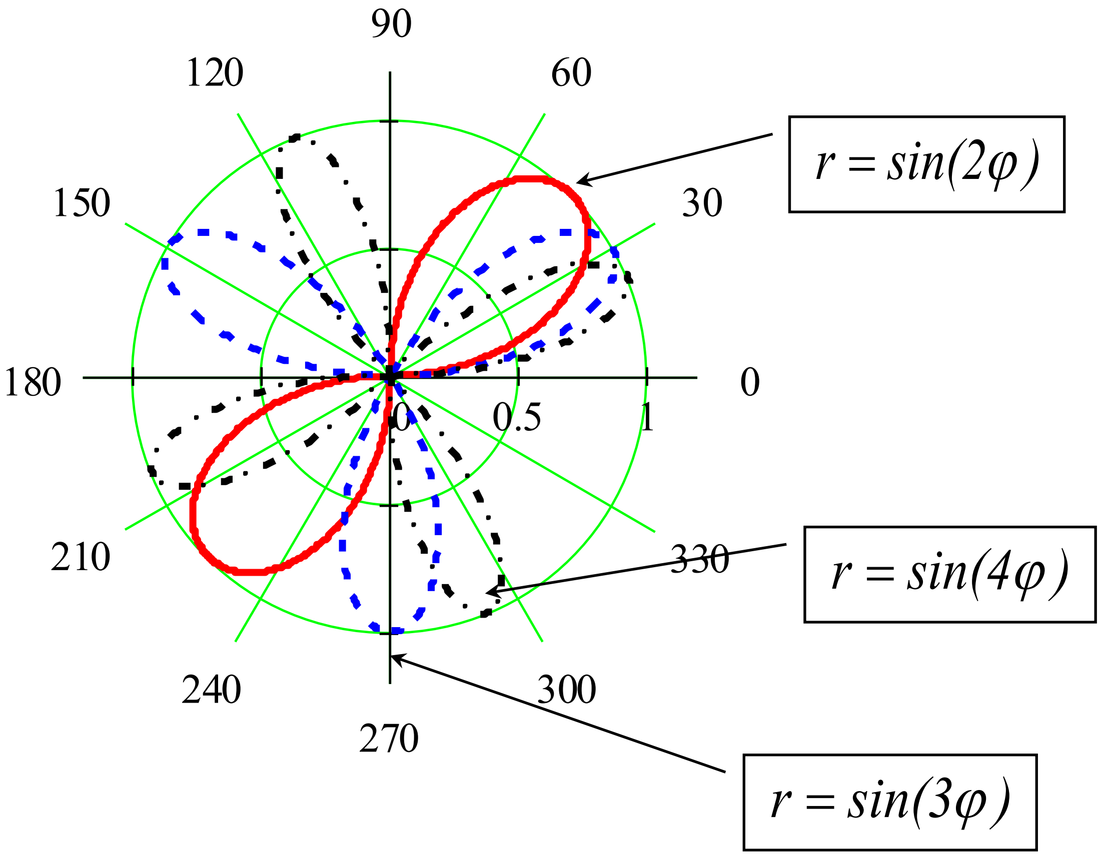
- Линии в полярных координатах (r; φ)

φ-угол поворота от полярной оси (оси OX) против часовой стрелки,
r -расстояние до полюса (начала координат).



Примеры линий в полярных координатах





- Площадь в полярных координатах:

  Если фигура ограничена исходящими из полюса лучами $\varphi = \varphi_1$,

$\varphi = \varphi_2$ и линией $r = r(\varphi)$, то площадь такого криволинейного

сектора $$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\left(r(\varphi)\right)^2}{2} d\varphi;$$

Если фигура ограничена исходящими из полюса лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и линиями $r = r_1(\varphi)$ ближе к полюсу, $r = r_2(\varphi)$ дальше от

полюса, то площадь такой фигуры $$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\left(r_2(\varphi)\right)^2 - \left(r_1(\varphi)\right)^2\right) d\varphi;$$

- Объём тела
  Если для любой проекции $x \in [a; b]$ тела на ось OX известна площадь поперечного сечения $S(x)$ такого тела,

  то его объём тела $$V = \int_a^b S(x)dx;$$

- Если в плоскости XOY задана линия $y = f(x)$ и при $x \in [a; b]$ она вращается вокруг оси OX, то объём тела вращения
$$V_x = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx;$$
- Если в плоскости XOY задана линия $x = g(y)$ и при $y \in [y_1; y_2]$ она вращается вокруг оси OY, то объём тела вращения
$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left(g(y)\right)^2 dy.$$

5 Рекомендуемая литература

5.1 Основная литература:

1. **517(075) Ш 63**
Шипачев, В. С. Высшая математика : учеб. пособие для бакалавров / В. С. Шипачев. - 8-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, **2012**. - 447 с. - (Бакалавр, Базовый курс). - Рек. М-вом образования и науки РФ. - ISBN 978-5-9916-2031-4: 316-91.
Кол-во экземпляров: всего - **10**
2. **517(075) Б 74**
Богомолов Н. В. Математика : учеб.для бакалавров / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, **2013**. - 396 с. - (Бакалавр, Базовый курс). - Допущено М-вом образования и науки РФ.
- ISBN 978-5-9916-2568-5 : 336-55.
Кол-во экземпляров: всего –**15**
3. **Фролов С.В.** Высшая математика [*Электронный ресур*с]: учеб. пособие/ Фролов С.В., Багаутдинова А.Ш.— [*Электрон. текстовые данные*]— СПб.: ГИОРД, **2012**.— 616 с.— Режим доступа: ЭБС «IPRbooks», по паролю
4. **Туганбаев А. А.** Основы высшей математики : учеб.пособие для ВПО/А. А. Туганбаев. – 1-е изд. [*Электронный ресурс]* — СПб. : Лань, **2011**. — 491 с. - Режим доступа «ЭБС ЛАНЬ»

5.2 Дополнительная литература:

5. **517(075) Б 50**
Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : учеб.для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - 10-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар : Лань, 2003. - 736 с. - (Учебники для вузов, Специальная литература). - Библиогр.: с. 736.
- ISBN 5-8114-0499-9 : 280-00.
Кол-во экземпляров: всего – 30
6. **517(075) Д 17**
Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб.пособие для вузов : в 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003. - 416 с. : ил. - С решениями. - ISBN 5-329-00528-0 : 72-00. - ISBN 5-94666-009-8 : 65-00. - ISBN 5-329-00327-X.
Кол-во экземпляров: всего – 52
7. **517 З-17**
Зайцев И. А. Высшая математика : [учеб.пособие] / И. А. Зайцев. - 4-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2005. - 398 с. : ил. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 392. - Рек. М-вом образования РФ для с.-х. вузов. - ISBN 5-7107-9071-0 : 146-85.
Кол-во экземпляров: всего - 25

5.3 Методическое обеспечение

8. Орлов Ю.В. Производная функции одной переменной .
 Учебно – методическое пособие.
 – Новоуральск, НТИ НИЯУ МИФИ 2013.-42 с.
9. Орлов Ю.В. «Интегрирование». Учебно – справочное пособие по курсу «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» для студентов всех специальностей заочной формы обучения. Новоуральск, изд. НТИ НИЯУ МИФИ 2013.− 32 с.

5.4 Информационное обеспечение (включая перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»)

1 http://nsti.ru
2 научная библиотека e-librari
3 ЭБС «Лань»
4 ЭБС «IPRbooks»

Орлов Ю.В. Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины «Математика», 2 семестр для бакалавров заочной формы обучения профиля 15.03.05 «Технология машиностроения».
– Новоуральск, изд. НТИ НИЯУ МИФИ, 2025 – 88 с.

Макет подготовлен на кафедре ОНД НТИ НИЯУ МИФИ

Подписано в печать _______________ Формат А5 Гарнитура

Печать плоская. Усл-печ. л. __________ Тираж _______ экз. Заказ _______

Издательство Новоуральского технологического института НИЯУ МИФИ,

624130, г. Новоуральск, ул. Ленина 85, НТИ НИЯУ МИФИ