МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**Новоуральский технологический институт–**
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
**(НТИ НИЯУ МИФИ)**

**Колледж НТИ**

Цикловая методическая комиссия общетехнических дисциплин
энергетики и электроники

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ (ЛАБОРАТОРНЫХ) РАБОТ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для студентов колледжа НТИ НИЯУ МИФИ,

обучающихся по программе среднего профессионального образования

специальность 11.02.16

«Монтаж, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов
и устройств»

очная форма обучения

на базе основного общего образования

квалификация

специалист по электронным приборам и устройствам

Новоуральск 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение....................................................................................4
Практическое занятие №1 ....................................................................7
Практическое занятие №2 ....................................................................16
Практическое занятие №3 ....................................................................22
Практическое занятие №4 ....................................................................33
Практическое занятие №5 ....................................................................40
Практическое занятие №6 ....................................................................49
Практическое занятие №7 ....................................................................53
Практическое занятие №8 ....................................................................58
Практическое занятие №9 ....................................................................62
Практическое занятие №10 ..................................................................66

# Введение

Лабораторные и практические занятия по учебной дисциплине ЕН.01 Математика
составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки и направлены на подтверждение теоретических положений и формирование практических умений и практического опыта:

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК. 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК. 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК. 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК. 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Лабораторные и практические занятия относятся к основным видам учебных занятий.

Выполнение студентами лабораторных и практических работ направлено:

– на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин;

– формирование умений применять полученные знания на практике;

– реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

– развитие интеллектуальных умений (аналитических, проектировочных, конструкторских и др.) у будущих специалистов;

– выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является экспериментальное подтверждение и проверка существенных теоретических положений (законов, зависимостей).

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений – профессиональных (выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных (решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности.

Содержанием лабораторных работ по дисциплине /профессиональному модулю являются экспериментальная проверка формул, методик расчета, установление и подтверждение закономерностей, ознакомление с методиками проведения экспериментов, установление свойств веществ, их качественных и количественных характеристик, наблюдение развития явлений, процессов и др. В ходе выполнения заданий у студентов формируются практические умения и навыки обращения с различными приборами, установками, лабораторным оборудованием, аппаратурой, которые могут составлять часть профессиональной практической подготовки, а также исследовательские умения (наблюдать, сравнивать, анализировать, устанавливать зависимости, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследование, оформлять результаты).

Содержанием практических занятий по дисциплине /профессиональному модулю являются решение разного рода задач, в том числе профессиональных (анализ производственных ситуаций, решение ситуационных производственных задач, выполнение профессиональных функций в деловых играх и т.п.), выполнение вычислений, расчетов, чертежей, работа с измерительными приборами, оборудованием, аппаратурой, работа с нормативными документами, инструктивными материалами, справочниками, составление проектной, плановой и другой технической и специальной документации и другое.

Содержание практических, лабораторных занятий охватывают весь круг профессиональных умений, на подготовку к которым ориентирована данная дисциплина/профессиональный модуль, которые в дальнейшем закрепляются и совершенствуются в процессе курсового проектирования, практикой по профилю специальности и преддипломной практикой.

Лабораторные занятия проводятся в специально оборудованных учебных лабораториях. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях (площадках). Продолжительность занятия – не менее 2-х академических часов. Необходимыми структурными элементами занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также организация обсуждения итогов выполнения работы.

Все студенты, связанные с работой в лаборатории, обязаны пройти инструктаж по безопасному выполнению работ, о чем расписываются в журнале инструктажа по технике безопасности.

Выполнению лабораторных и практических работ предшествует проверка знаний студентов, их теоретической готовности к выполнению задания.

Лабораторные и практические работы студенты выполняют под руководством преподавателя. При проведении лабораторных и практических занятий учебная группа может делиться на подгруппы численностью не менее 8 человек. Объем заданий для лабораторных и практических занятий спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть выполнены качественно большинством студентов.

Формы организации работы обучающихся на лабораторных работах и практических занятиях: фронтальная, групповая и индивидуальная.

При фронтальной форме организации занятий все студенты выполняют одновременно одну и ту же работу. При групповой форме организации занятий одна и та же работа выполняется бригадами по 2 - 5 человек. При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Отчет по практической и лабораторной работе представляется в печатном виде в формате, предусмотренном шаблоном отчета по практической, лабораторной работе. Защита отчета проходит в форме доклада обучающегося по выполненной работе и ответов на вопросы преподавателя.

Оценки за выполнение лабораторных работ и практических занятий могут выставляться по пятибалльной системе или в форме зачета и учитываться как показатели текущей успеваемости студентов.

**Критерии оценки лабораторных, практических работ.**

**Оценка «5»** ставится, если учащийся выполняет работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения опытов и измерений; самостоятельно и рационально монтирует необходимое оборудование; все опыты проводит в условиях и режимах, обеспечивающих получение правильных результатов и выводов; соблюдает требования правил безопасности труда; в отчете правильно и аккуратно выполняет все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики, вычисления; правильно выполняет анализ погрешностей.

**Оценка «4»** ставится, если выполнены требования к оценке «5» , но было допущено два - три недочета, не более одной негрубой ошибки и одного недочёта.

**Оценка «3»** ставится, если работа выполнена не полностью, н о объем выполненной части таков, позволяет получить правильные результаты и выводы: если в ходе проведения опыта и измерений были допущены ошибки.

**Оценка «2»** ставится, если работа выполнена не полностью и объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов: если опыты, измерения, вычисления, наблюдения производились неправильно.

## Практическое занятие №1

**Тема:** Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
**Цель работы:** получить практические навыки выполнения действий с комплексными числами в различных формах записи, нахождения модуля и аргумента комплексного числа, решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

### 1. Краткие теоретические сведения

***Комплексным числом*** $z$ называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где $x, y$ - действительные числа, $i$ - мнимая единица

$$i^2 = -1.$$

$x$ - ***действительная часть*** комплексного числа $(\operatorname{Re} z)$,
$y$ - **мнимая часть** комплексного числа. $(\operatorname{Im} z)$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными,** если равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными.**

Запись комплексного числа

$$z = x + iy,$$

называется **алгебраической формой записи** комплексного числа **z.**

## Действия с комплексными числами в алгебраической форме записи.

**1. Сложение**

**Суммой** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

**2. Вычитание**

**Разностью** двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

**3. Умножение**

**Произведением** комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

На практике, чтобы выполнить умножение комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

нужно раскрыть скобки, заменить $i^2 = -1$, а затем привести подобные слагаемые.

**4. Деление**

**Частное** двух комплексных чисел $z_1$ и $z_2 \neq 0$ находят по следующему **правилу**:

числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножают на число $\overline{Z}_2$, сопряженное знаменателю, раскрывают скобки, заменяют $i^2 = -1$, приводят подобные слагаемые и почленно делят числитель на знаменатель.

Возведение в степень комплексного числа и извлечение корня $n$-ой степени из комплексного числа в алгебраической форме не выполняют.

## Геометрическое изображение комплексного числа.

Комплексное число $z = x + iy$, изображают на координатной плоскости в виде радиус-вектора, конец которого имеет координаты $(x; y)$

Длина радиус-вектора называется **модулем комплексного числа,** обозначается $r$ и вычисляется по формуле:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол, который радиус-вектор, изображающий комплексное число, образует с положительным направлением оси $OX$, называется **аргументом комплексного числа** и обозначается $\varphi$.

Аргумент комплексного числа удобно определять с помощью следующей таблицы:

| Четверть, в которой находится радиус-вектор, изображающий комплексное число | Формула для определения аргумента |
|---|---|
| I | $\varphi = \varphi_0$ |
| II, III | $\varphi = \varphi_0 + \pi$ |
| IV | $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ |

где $\varphi_0$ определяют по формуле:

$$\varphi_0 = arctg\,\frac{y}{x}.$$

**Тригонометрическая форма записи комплексного числа:**

$$z = r(\sin\varphi + i\sin\varphi)$$

**Показательная форма записи комплексного числа:**

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

**Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах записи:**

| **Действие** | **Тригонометрическая форма записи** $z_1 = r_1(\sin\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $z_2 = r_2(\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ | **Показательная форма записи** $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ |
|---|---|---|
| **Умножение** | | |

| | | |
|---|---|---|
| | $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$ | $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ |
| **Деление** | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$ | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ |
| **Возведение в целую степень** | $z^n = r^n \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$ | $z^n = r^n e^{in\varphi}$ |
| **Извлечение корня $n$-ой степени** | $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k = 0 \div (n-1)$ | $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k = 0 \div (n-1)$ |

## 2. Методика решения типовых задач

**2.1** Пример 1. Выполнить действия в алгебраической форме

$$\frac{(7-5i)(6+7i)}{(1-3i)+(3-i)}.$$

Решение. В числителе дроби раскроем скобки, а в знаменателе выполним сложение комплексных чисел, сложив соответственно действительные и мнимые части:

$$\frac{(7-5i)(6+7i)}{(1-3i)+(3-i)} = \frac{42+49i-30i-35i^2}{4-4i} = \frac{42+35+19i}{4-4i} = \frac{77+19i}{4-4i}.$$

Умножим теперь числитель и знаменатель дроби на выражение $4+4i$, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{(77+19i)\cdot(4+4i)}{(4-4i)\cdot(4+4i)} = \frac{308+308i+76i+76i^2}{16-16i^2} = \frac{234+384i}{32} = \frac{117}{16} + 12i.$$

**2.2** Пример 2. Даны числа $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$. Выполнить в тригонометрической форме записи $z_1 \cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_1}$, в показательной форме $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2{}^4$.

Решение. Найдём модули и аргументы чисел $z_1$ и $z_2$:

$$r_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$$

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Радиус-вектор, изображающий число $z_1$ находится в IV четверти, поэтому аргумент числа $z_1$ находим по формуле

$$\varphi_1=\varphi_0+2\pi=arctg\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+2\pi=-arctg\sqrt{3}+2\pi=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$$

Радиус-вектор, изображающий число $z_2$ находится в III четверти, поэтому аргумент числа $z_2$ находим по формуле

$$\varphi_2=\varphi_0+2\pi=arctg\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}+\pi=arctg1+\pi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

Запишем числа $z_1$ и $z_2$ в тригонометрической и показательной формах:

$$z_1=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3},\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_1=e^{\frac{5\pi}{3}i},\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Найдём $z_1\cdot z_2$ (см. таблицу):

$$z_1z_2=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{35\pi}{12}+i\sin\frac{35i}{12}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

Найдём $\sqrt[3]{z_1}$ (см. таблицу):

$$k=0,\qquad z_{1,0}=\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}$$

$$k=1,\qquad z_{1,1}=\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}=\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}$$

$$k=2,\qquad z_{1,2}=\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}=\cos\frac{17\pi}{9}+i\sin\frac{17\pi}{9}$$

Найдём $\frac{z_1}{z_2}$ (см. таблицу):

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

Найдём $z_2^4$ (см. таблицу):

$$z_2^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4 e^{4\cdot\frac{5\pi}{4}i}=\frac{4}{81}e^{5\pi\cdot i}=\frac{4}{81}e^{\pi i}$$

**2.3** Пример 3. Решить уравнение с отрицательным дискриминантом $x^2+4x+13=0$.

Решение. Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot 13=-36.$$

Представим

$$-36=-1\cdot 36=36\cdot i^2$$

Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения, получим

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{36i^2}}{2}=\frac{-4\pm 6i}{2}=-2\pm 3i.$$

Таким образом, корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два комплексно сопряжённых числа. В данном случае

$$z_1=-2+3i,\quad z_2=-2-3i$$

## 3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

## 4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

## 5. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение комплексного числа.
5.2 Что называется мнимой единицей?
5.3 Как записывают комплексное число в алгебраической форме?
5.4 Как выполняют сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме записи?
5.5 Как геометрически изображают комплексное число?
5.6 Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулу вычисления модуля и аргумента.
5.7 Как записывают комплексное число в тригонометрической форме, в показательной форме?
5.8 Как выполняют умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня целой степени в тригонометрической и показательной формах записи (запишите формулы)?

## 6. Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.1 Конспект теоретических занятий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

| **ВАРИАНТ №1** | **ВАРИАНТ №2** |
|---|---|
| №1. Выполнить действия в алгебраической форме: $\dfrac{(2+i)\cdot(3-i)}{(2+3i)-(3+2i)}$ | №1. Выполнить действия в алгебраической форме: $\dfrac{(4+i)\cdot(5+3i)}{(3+i)+(2+i)}$ |

| | |
|---|---|
| №2. Даны числа $z_1 = -\frac{1}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7} i$ и $z_2 = -\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot i$.<br><br>a) Записать числа $z_1$ и $z_2$ в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.<br><br>b) Найти $z_1 \cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме.<br><br>c) Найти $\sqrt[3]{z_1}$ в показательной форме.<br><br>№3. Решить уравнение: $x^2 - 2x + 5 = 0$ | №2. Даны числа $z_1 = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} i$ и $z_2 = -1 - \sqrt{3} \cdot i$.<br><br>a) Записать числа $z_1$ и $z_2$ в тригонометрической и показательной формах, .геометрически изобразить эти числа.<br><br>b) Выполнить действия в тригонометрической форме $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1^3$.<br><br>c) Выполнить действия в показательной форме $z_1 \cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_2}$.<br><br>№3. Решить уравнение: $x^2 - 8x + 25 = 0$ |
| **ВАРИАНТ №3** | **ВАРИАНТ №4** |
| №1. Выполнить действия в алгебраической форме: $$\frac{(3-i)\cdot(1-4i)}{(2-i)+(-2+2i)}$$ | №1. Выполнить действия в алгебраической форме: $$\frac{(5-7i)\cdot(7+6i)}{(4-5i)-(3-4i)}$$ |

| | |
|---|---|
| №2. Даны числа $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $z_2 = -4 - 4\sqrt{3} \cdot i$.<br><br>a) Записать числа $z_1$ и $z_2$ в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.<br><br>b) Выполнить действия в тригонометрической форме $z_1 \cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_1}$.<br><br>c) Выполнить действия в показательной форме $\frac{z_2}{z_1}$, $z_2^{\ 3}$.<br><br>№3. Решить уравнение: $x^2 + 6x + 18 = 0$ | №2. Даны числа $z_1 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ и $z_2 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i$.<br><br>a) Записать числа $z_1$ и $z_2$ в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.<br><br>b) Выполнить действия в тригонометрической форме $z_2^{\ 5}$, $\sqrt[4]{z_1}$<br><br>c) Выполнить действия в показательной форме $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.<br><br>№3. Решить уравнение: $x^2 + 8x + 17 = 0$ |

**Практическое занятие №2**

**Тема: Дифференцирование элементарных и сложных функций. Решение практических задач с помощью производных.**

**Цель работы:** получить практические навыки нахождения производных различных функций

## 1. Краткие теоретические сведения

***Производной функции*** $y = y(x)$ называется предел отношения приращения функции $(\Delta y)$ к приращению аргумента $(\Delta x)$, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$y'$ - обозначение производной функции $y = y(x)$.

Согласно определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

### Основные правила дифференцирования:

**1.** ***Производная постоянной величины.***

$$C' = 0.$$

**2.** ***Производная суммы***

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

**3.** ***Производная произведения.***

$$(uv)' = u'v + uv'$$

***Следствие.***

$$(cu)' = cu'.$$

**4.** ***Производная частного***.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v_2}.$$

5. **Производная сложной функции**

***Сложной*** называется функция, у которой аргумент также является функцией.

Символически сложную функцию обозначают

$$y = y(f(x)),$$

где $f(x)$ - промежуточный аргумент сложной функции $y$.

При нахождении производной сложной функции используют ***правило дифференцирования сложной функции*** и ***таблицей производных сложных функций.***

**Правило дифференцирования сложной функции**

$$y' = y'_f \cdot f'_x$$

**Практическое правило:** чтобы найти производную сложной функции её надо продифференцировать как простую, сохраняя аргумент и результат умножить на производную этого аргумента.

**6. Таблица производных элементарных функций.**

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, в частности $x' = 1$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

   $(kx+b)' = k$.

2. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, в частности $\left(e^x\right)' = e^x$.

3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4. $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

11. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

**7. Таблица производных сложных функций**

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$, в частности $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$,

   $\left((ax+b)^n\right)' = an(ax+b)^{n-1}$

2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

3. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$, в частности $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

4. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

6. $\left(tgu\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

7. $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

8. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

9. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

10. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

11. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

## 2. Методика решения типовых задач

**2.1 Пример 1.** Найти производную функции $y = 5x^3 - 3x^2 + \ln x$.

**Решение.** Применим последовательно правила дифференцирования производная суммы нескольких функций, вынесение постоянного множителя за знак производной и формулы из таблицы производных 2 и 4, получим:

$$y' = \left(5x^3 - 3x^2 + \ln x\right)' = 5\left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' + \left(\ln x\right)' = 5 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{x} = .$$

$$= 15x^2 - 6x + \frac{1}{x}.$$

**Пример 2.** Найти производную функции $y = \sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2}$.

**Решение.** Представим каждое слагаемое в правой части уравнения функции в виде степени:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$

тогда

$$y' = \left( \sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} \right)' =$$

$$\left( x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2} \right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - 5 \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{2}{3}-1} - (-2) x^{-2-1} = ,$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3} x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-3}$$

**2.2 Пример 3.** Найти производную функции $y = e^x \cdot arctgx$ .

**Решение.** Применим правило дифференцирования производная частного, получим:

$$y' = \left( e^x \cdot arctgx \right)' = \left( e^x \right)' \cdot arctgx + e^x \cdot \left( arctgx \right)' = e^x \cdot arctgx + e^x \cdot \frac{1}{1 + x^2} .$$

**2.3 Пример 4.** Найти производную функции $y = \dfrac{\cos x}{9^x - 3x^2}$ .

**Решение.** Применим правило дифференцирования производная частного:

$$y' = \left( \frac{\cos x}{9^x - 3x^2} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \left( 9^x - 3x^2 \right) - \cos x \cdot \left( 9^x - 3x^2 \right)'}{\left( 9^x - 3x^2 \right)^2} = .$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \left( 9^x - 3x^2 \right) - \cos x \cdot \left( 9^x \ln x - 6x \right)}{\left( 9^x - 3x^2 \right)^2}$$

**2.4 Пример 5.** Найти производную функции $y = \sin^3 x$

**Решение.** Продифференцируем данную функцию как степенную с промежуточным аргументом $\sin x$, получим:

$$y' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x .$$

**Пример 6.** Найти производную функции $y = \ln \cos x$ .

**Решение.** Продифференцируем данную функцию как логарифмическую с промежуточным аргументом $\cos x$, получим:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx .$$

**Пример 7.** Найти производную функции $y = \ln \sin \dfrac{x+2}{x}$ .

**Решение.** Продифференцируем данную функцию как сложный логарифм, аргументом которого также является сложная функция синус:

$$y' = \left( \ln \sin \frac{x+2}{x} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x+2}{x}} \cdot \left( \sin \frac{x+2}{x} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x+2}{x}} \cdot \cos \frac{x+2}{x} \cdot \left( \frac{x+2}{x} \right)' =$$

$$= ctg\,\frac{x+2}{x}\cdot\frac{(x+2)'\cdot x-(x+2)\cdot x'}{x^2} = ctg\,\frac{x+2}{x}\cdot\frac{x-x-2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}\,ctg\,\frac{x+2}{x}.$$

## 3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

## 4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

## 5. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение производной функцию
5.2 Сформулируйте правила дифференцирования.

## 6. Список справочной литературы


6.1 Алексеева Е.В. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие для студентов 1-го и 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Математика»

6.2 Конспект теоретических занятий


# ПРИЛОЖЕНИЕ

## 1. Найти производные следующих функций:

| ВАРИАНТ №1 | ВАРИАНТ №2 |
|---|---|
| №1. $y = 5\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x}$ | №1 $y = 6x^2 - \frac{5}{x^3} - \sqrt[3]{x^4} + \frac{9}{\sqrt{x}}$ |
| №2. $y = arctgx \cdot \ln 2x$ | №2 $y = e^{-2x} \cdot \ln(3x+4)$ |
| №3. $y = \frac{\cos 8x}{ctgx + 3x^2}$ | №3. $y = \frac{x - \sin 4x}{\sqrt{x}}$ |
| | №4. $y = arctg\,6x \cdot \left(e^{tgx} + 2\right)$ |

| | |
|---|---|
| №4. $y=\left(5x^2+e^{3x}\right)\cdot arcctgx$<br><br>№5 $y=\ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$ | №5. $y=\cos\ln\left(2x-x^2\right)$ |
| **ВАРИАНТ №3** | **ВАРИАНТ №4** |
| №1. $y=2\sqrt[4]{x}+9x^2-5\sqrt[3]{x^2}+\frac{7}{x^2}$<br><br>№2. $y=\arccos x\cdot e^{-3x}$<br><br>№3. $y=\frac{tg4x}{\sin x+5x}$<br><br>№4.<br>$y=\left(2+3\arcsin 7x\right)\cdot\left(x^2+\ln\left(x^2+1\right)\right)$<br><br>№5. $y=\sin^2\frac{1-x}{1+x}$ | №1. $y=5\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$<br><br>№2. $y=\ln\left(2x+1\right)\cdot arctgx$<br><br>№3. $y=\frac{e^{2x}-3}{\cos x}$<br><br>№4. $y=\left(2\arccos 3x+5x^3\right)\cdot e^{tgx}$<br><br>№5. $y=\ln\sin\frac{x+2}{x}$ |

## 2. Решить задачу

Вариант1.

Задача. Тело движется прямолинейно по закону $S=2t^3+t^2-4$. Найти значение скорости и ускорения в момент времени t = 4.

Вариант2.

Задача. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $S=3t^2+t+4$. Найти кинетическую энергию тела ($E_к=\frac{m\vartheta^2}{2}$) через 4с. после начала движения.

Вариант3.

Задача. Сила тока изменяется в зависимости от времени t по закону $I=0{,}4t^2$(I – в амперах, t – в секундах). Найти скорость измерения силы тока в конце 8$^{ой}$ секунды.

Вариант4.

Задача. Температура тела T изменяется в зависимости от времени t по закону

$T = 0{,}5t^2 - 2t$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 5°$.

## Практическое занятие №3

**Тема: Нахождение неопределенного интеграла методами непосредственного интегрирования, подстановки и интегрирования по частям.**

**Цель работы:** получить практические навыки нахождения неопределённых интегралов различными способами.

### 1. Краткие теоретические сведения

**Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке $X$, если для всех значений $x$ из этого промежутка выполняется**

$$F'(x) = f(x).$$

**Теорема.**

***Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке $X$, то функция***

$$F(x) + C,$$

***где $C$ - произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$ на этом же промежутке.***

**Определение.**

**Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определённых на некотором промежутке, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом**

$$\int f(x)dx.$$

Читается: «интеграл от эф от икс де икс».

По определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

$x$ - переменная интегрирования,

$\int$ - знак неопределённого интеграла,

С - постоянная величина (константа).

Нахождение неопределённого интеграла по данной подынтегральной функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Так как интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, то для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

## Основные свойства неопределённого интеграла

1. ***Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.***

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. ***Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.***

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. ***Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.***

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. ***Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.***

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5. ***Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или более функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой из этих функций.***

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(dx) \pm \int g(x)dx.$$

## Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \sin ax dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \cos ax dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$, $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$.

Интегралы, содержащиеся в данной таблице, называются ***табличными*** интегралами.

### Основные методы интегрирования.

Задача интегрирования принципиально труднее задачи дифференцирования. Так, например, таблица интегралов не исчерпывает даже основных элементарных функций, не говоря уже о сложных функциях.

Не существует также правил интегрирования произведения, частного, сложной и обратной функций.

Существуют лишь отдельные методы, позволяющие интегрировать отдельные классы подынтегральных функций, и выбор того или иного метода интегрирования зависит от вида подынтегральной функции.

**Непосредственное интегрирование.**

***Непосредственное интегрирование*** - это такой способ интегрирования, при котором данный интеграл с помощью различных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределённого интеграла сводится к одному или нескольким табличным интегралам.

**Метод замены переменной (способ подстановки).**

Найти заданный неопределённый интеграл непосредственным интегрированием удаётся далеко не всегда, а иногда это сопряжено с большими трудностями. В таких случаях применяют другие способы интегрирования.

Одним из наиболее эффективных методов является ***способ подстановки*** или ***замены переменной интегрирования***.

Сущность этого метода заключается в том, что путём введения новой переменной интегрирования удаётся свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно лёгко берётся непосредственно.

**Алгоритм метода:**

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

1. Записываем уравнение замены
$$y = y(x),$$
где $y(x)$ - некоторая функция.
2. Находим дифференциал этой функции
$$dy = y'(x)dx.$$
3. Выражаем
$$dx = \frac{dy}{y'(x)}.$$
4. Подставим $y$ и $dy$ в данный интеграл:
$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$
Если замена выполнена правильно, то
$$\int g(y)dy$$
будет табличным.
5. Находим
$$\int g(y)dy = F(y) + C.$$
6. Чтобы получить окончательный ответ, вместо переменной $y$ подставляем выражение $y(x)$:
$$\int f(x)dx = F(y(x)) + C.$$

**Интегрирование по частям.**

Интегрирование по частям – это, практически, формула интегрирования произведения двух функций.

Хорошо известна формула дифференциала произведения двух функций:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Проинтегрировав обе части данного равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu,$$

т.к.

$$\int d(uv) = uv,$$

то

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

Откуда

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Последняя формула называется ***формулой интегрирования по частям***.

Формула интегрирования по частям сводит нахождение интеграла $\int udv$ к отысканию другого интеграла $\int vdu$; её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

При этом в качестве $u$ берётся функция, которую проще продифференцировать, а в качестве $dv$ берётся та часть подынтегрального выражения, которую проще проинтегрировать. Иногда формулу интегрирования по частям приходиться использовать несколько раз.

При применении формулы интегрирования по частям интегралы можно разбить на 3 основные группы:

1. В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \qquad \int P(x)\sin axdx, \qquad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ - многочлен переменной $x$, $a$ - число, полагают

$$u = P(x), \qquad dv = \begin{cases} e^{ax}dx, \\ \sin axdx, \\ \cos axdx \end{cases}$$

2. В интегралах вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin xdx, \quad \int P(x)\arccos xdx,$$

$$\int P(x)arctgx\,dx, \quad \int P(x)arcctgx\,dx$$

полагают

$$u = \begin{cases} \ln x, \\ \arcsin x, \\ \arccos x, \\ arctgx, \\ arcctgx \end{cases} \qquad dv = P(x)dx$$

3. В интегралах вида

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad \int e^{ax}\cos bx\,dx$$

за $u$ принимают любую функцию, за $dv$ соответственно оставшуюся часть подынтегрального выражения.

## 2. Методика решения типовых задач

**2.1** Пример 1. Найти неопределённый интеграл $\int\left(5x^4-4x^2+3x-1\right)dx$.

Решение. Применим свойство 5:

$$\int\left(5x^4-4x^2+3x-1\right)dx = \int 5x^4dx - 4x^2dx + \int 3xdx - \int dx.$$

В первых трёх интегралах применим свойство 4, в четвёртом - свойство 3, а затем табличный интеграл 1, получим:

$$\int 5x^4dx - 4x^2dx + \int 3xdx - \int dx = 5\int x^4dx - 4\int x^2dx + 3\int xdx - x =$$

$$= 5\cdot\frac{x^5}{5} - 4\cdot\frac{x^3}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - x + C = x^5 - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C.$$

Пример 2. Найти неопределённый интеграл $\int\left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 1\right)dx$.

Решение. Используем свойства 5 и 4, а также преобразуем каждое слагаемое подынтегральной функции в степень, получим:

$$\int\left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 1\right)dx = 5\int x^{\frac{2}{3}}dx - 3\int x^{-2}dx - 2\int x^{-\frac{4}{3}}dx + \int dx =$$

$$= 5\cdot\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}} - 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - 2\cdot(-3)\cdot x^{-\frac{1}{3}} + x + C = 3\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + x + C.$$

Пример 3. Найти неопределённый интеграл $\int\frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$.

Решение. Разделим почленно числитель дроби на знаменатель, получим

$$\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx=\int\left(3x^2+2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)dx.$$

Применим свойство 5:

$$\int\left(3x^2+2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)dx=\int 3x^2dx+\int 2dx-\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{7}{x^2}dx=$$

$$=3\int x^2dx+2\int dx-3\int\frac{dx}{x}+7\int x^{-2}dx=3\cdot\frac{x^3}{3}+2x-3\ln|x|+7\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

$$=x^3+2x-3\ln|x|-\frac{7}{x}+C$$

Пример 4. Найти неопределённый интеграл $\int e^x\left(3-\frac{e^{-x}}{2\cos^2 x}\right)dx$.

Решение. Раскроем в подынтегральном выражении скобки и применим табличные интегралы 3 и 6, получим:

$$\int e^x\left(3-\frac{e^{-x}}{2\cos^2 x}\right)dx=3\int e^x dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x}=3e^x-\frac{1}{2}tgx+C.$$

Пример 5. Найти $\int\frac{dx}{4+3x^2}$.

Решение. Приведём данный интеграл к табличному интегралу 9:

$$\int\frac{dx}{4+3x^2}=\int\frac{dx}{3\left(\frac{4}{3}+x^2\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{\sqrt{3}x}{2}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}arctg\frac{\sqrt{3}x}{2}+C.$$

**2.2** Пример 1. Найти $\int e^{\frac{x}{2}}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $x=2t$, тогда $dx=2tdt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{2}}dx=\int e^t\cdot 2dt=2\int e^t dt=2e^t+C=2e^{\frac{x}{2}}+C.$$

Пример 2. Найти $\int(3x-5)^7dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = 3x - 5$, тогда $dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int (3x-5)^7 dx = \frac{1}{3}\int t^7 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{(3x-5)^8}{24} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx$

Решение. Сделаем подстановку $t = 3 + 2x^3$, тогда $dt = 6x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{dt}{6}$, следовательно,

$$\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx = \frac{1}{6}\int t^4 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5} + C = \frac{\left(3+2x^3\right)^5}{30} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$.

Решение. Подстановка $t = 1 + 2\sin x$, тогда $dt = 2\cos x dx \Rightarrow \cos x dx = \frac{dt}{2}$, получим

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{(1+2\sin x)} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \sin(4x+3)dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = 4x + 3$, тогда $dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4}$, следовательно,

$$\int \sin(4x+3)dx = \frac{1}{4}\int \sin t dt = -\frac{1}{4}\cos t + C = -\frac{1}{4}\cos(4x+3) + C.$$

Пример 6. Найти $\int x^2 e^{x^3-2}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = x^3 - 2$, тогда $dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int x^2e^{x^3-2}dx = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3-2} + C.$$

**2.3** Пример 1. Найти $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе, поэтому

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx, \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} -$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = \frac{dx}{x^3} \Rightarrow v = -\frac{1}{2x^2}$.

Тогда по формуле интегрирования по частям находим:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^3} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (x-5)\cos x dx$.

Данный интеграл относится к первой группе, поэтому $u = x-5 \Rightarrow du = dx,$ $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$, по формуле интегрирования по частям имеем

$$\int (x-5)\cos x dx = (x-5)\sin x - \int \sin x dx = (x-5)\sin x + \cos x + C.$$

## 3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

## 4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

## 5. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение первообразной функции.
5.2 Дайте определение неопределенного интеграла.
5.3 Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
5.4 В чем состоит метод замены переменного.
5.5 Сформулируйте правило нахождения неопределенного интеграла по частям.

## 6. Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

| ВАРИАНТ 1 | ВАРИАНТ 2 |
|---|---|
| №1. *Вычислите интегралы функций:*<br>1) $\int(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8)dx$<br>2) $\int \sqrt[4]{x^3}dx$<br><br>№2. *Вычислить методом замены переменных:*<br>1) $\int sin^2 x \cdot cos\, x\, dx$<br>2) $\int 4x^3 \cdot (x^4 - 5)^7 dx$<br>3) $\int \frac{e^x}{e^x - 3} dx$<br><br>№3. *Вычислить, интегрируя по частям:*<br>1) $\int x \cdot e^{-3x}dx$<br>2) $\int(2x^2 - 4) \cdot e^{-4x}dx$ | №1. *Вычислите интегралы функций:*<br>1) $\int x^2 \cdot (1 + 2x)dx$<br>2) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx$<br><br>№2. *Вычислить методом замены переменных:*<br>1) $\int \sqrt{3x+5}\, dx$<br>2) $\int cos^7 x \cdot sin\, x\, dx$<br>3) $\int \frac{5tgx}{cos^2 x} dx$<br><br>№3. *Вычислить, интегрируя по частям:*<br>1) $\int ln\, x \cdot (2x - 3)\, dx$<br>2) $\int x^2 \cos 4x\, dx$ |

| ВАРИАНТ 3 | ВАРИАНТ 4 |
| --- | --- |
| *№1. Вычислите интегралы функций:*<br>*1)* $\int (x^4 - 8x^3 + 4x)dx$<br>*2)* $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$<br><br>*№2. Вычислить методом замены переменных:*<br>*1)* $\int cos^4 x \cdot sin\, x\, dx$<br>*2)* $\int \frac{8x-2}{4x^2-2x}dx$<br>*3)* $\int e^{3x^3} \cdot x^2\, dx$<br><br>*№3. Вычислить, интегрируя по частям:*<br>*1)* $\int x3^x dx$<br>*2)* $\int (x^2 - 3) \cdot cos\frac{x}{3}dx$ | *№1. Вычислите интегралы функций:*<br>*1)* $\int (x+3)^2\, dx$<br>*2)* $\int \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}dx$<br><br>*№2. Вычислить методом замены переменных:*<br>*1)* $\int \frac{1}{2x-9}dx$<br>*2)* $\int e^{-sin\, x} \cdot cos\, x\, dx$<br>*3)* $\int \frac{e^x}{7e^x-2}dx$<br><br>*№3. Вычислить, интегрируя по частям:*<br>*1)* $\int x\, sin\, 8x\, dx$<br>*2)* $\int (3x^2 + 2) \cdot sin\, 5x\, dx$ |

## Практическое занятие №4

**Тема: Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница, методами подстановки и интегрирования по частям.**

**Цель работы:** получить практические навыки вычисления определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, методом замены и по частям.

### 1. Краткие теоретические сведения

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, $y = 0,\ x = a,\ x = b$ называется ***криволинейной трапецией***.

**Определение.** *Предел интегральной суммы* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *при* $n \to \infty$ *называется* ***определённым интегралом*** *от функции* $y = f(x)$ *и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

$a$ - нижний предел интегрирования,
$b$ - верхний предел интегрирования,
$f(x)$ - подынтегральная функция,
$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;
$[a;b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения определённого интеграла вытекает его геометрический смысл: *определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

### Свойства определённого интеграла.

*Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого слагаемого.*

$$\int\limits_a^b \left( f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx .$$

*Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

*При перестановке местами пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный.*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

*Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

*Отрезок интегрирования можно разбивать на части.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a < c < b$.

**Формула Ньютона - Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла.**

Вычисляют определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по ***формуле Ньютона - Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ **,у**

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбница применяется для вычисления определённого интеграла во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ по формуле Ньютона - Лейбница необходимо сначала найти первообразную $F(x)$, поэтому для вычисления определённого интеграла применяют те же приёмы, что и для нахождения неопределённого интеграла.

## Замена переменной в определённом интеграле.

При вычислении определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ способом *замены переменной* данный интеграл с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ или $t=\psi(x)$ преобразуется в другой определённый интеграл с новой переменной интегрирования $t$ и являющийся табличным.

При этом старые пределы интегрирования $x_1=a$ и $x_2=b$ заменяются новыми пределы $t_1=\psi(a),\quad t_2=\psi(b)$.

Формула замены переменной в определённом интеграле выглядит следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

В данной формуле предполагается, что функции $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1;t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1;t_2]$.

*Замечание.* В отличие от интегрирования методом замены переменной в неопределённом интеграле при таком же способе интегрирования в интеграле определённом к старой переменной интегрирования не возвращаются.

## Интегрирование по частям в определённом интеграле.

**Теорема.** *Если функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a;b]$, *то имеет место формула интегрирования по частям в определённом интеграле*

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

*Замечание 1.* При вычислении определённого интеграла по частям используются те же рекомендации при выборе функции $u$ и выражения $dv$, что и при применении данного метода для неопределённого интеграла.

*Замечание 2.* При вычислении определённого интеграла по частям пределы интегрирования не пересчитываются.

## 2. Методика решения типовых задач

**2.1** Непосредственное интегрирование.

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 5x^4dx$.

Решение. Применяя свойство 2 определённого интеграла, табличный интеграл 1 и формулу Ньютона - Лейбница, имеем:

$$\int_1^2 5x^4dx = 5\int_1^2 x^4dx = 5\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = x^5\Big|_1^2 = 2^5-1^5 = 32-1 = 31.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^4\left(3x-e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.

Решение. Последовательно применим свойства 1 и 2 определённого интеграла, табличный интеграл и формулу Ньютона - Лейбница, получим:

$$\int_0^4\left(3x-e^{\frac{x}{4}}\right)dx = 3\int_0^4 xdx-\int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = \frac{3x^2}{2}\Big|_0^4-4e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = \frac{3\cdot4^2}{2}-4\cdot e^{\frac{4}{4}}+4e^{\frac{0}{4}} = 28-4e$$

Пример 3. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-x\sin x}{x}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель, применим свойство определённого интеграла 1 и табличные интегралы, получим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-x\sin x}{x}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{x}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx = \ln x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln\pi-\ln\frac{\pi}{2}+$$

$$\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2} = \ln 2-1$$

**a.** *Замена переменного*:

Пример 4. Вычислить $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение. Сделаем замену $t=\sqrt{1+3x} \Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3}, \quad dx=\frac{2t}{3}dt$.
Пересчитаем пределы интегрирования:

$$t_1=\sqrt{1+3\cdot 0}=1, \quad t_2=\sqrt{1+3\cdot 5}=4,$$

получаем

$$\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}=\int\limits_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}\cdot\frac{2t}{3}dt}{t}=\frac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4=\frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3}-4\right)-\frac{2}{9}\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{52}{3}+\frac{4}{27}=\frac{108}{27}=4.$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Сделаем замену $t=1+tgx \Rightarrow dt=\left(1+tgx\right)'dx=\frac{dx}{\cos^2 x}$ и найдём новые пределы интегрирования

$$t_1=1+tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1-1=0, \quad t_2=1+tg\frac{\pi}{4}=1+1=2,$$

тогда получим

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^2 \sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2=\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-0=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

*b. Интегрирование по частям:*

Пример 8. Вычислить $\int\limits_1^e x\ln xdx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим

$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}, \quad dv=xdx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$, тогда имеем:

$$\int_1^e x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{dx}{x}=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$$

Пример 9. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3xdx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому примем $u=2-x\Rightarrow du=-dx,\quad dv=\sin 3xdx\Rightarrow v=-\frac{1}{3}\cos 3x$,

тогда получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3xdx=-\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 3xdx=-\frac{1}{3}\left(2-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{2}+$$

$$\frac{1}{3}(2-0)\cos 0-\frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=0+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{9}\sin 0=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

## 3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

## 4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

## 5. Контрольные вопросы

5.1 Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
5.2 Запишите свойства определенного интеграла.
5.3 Запишите формулу для вычисления определенного интеграла по частям.

## 6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.

6.2 Конспект теоретических занятий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

| ВАРИАНТ №1 | ВАРИАНТ №2 |
|---|---|
| №1. Вычислить интегралы:<br>$a)\int_{-1}^{1}(6x^2-2x-5)dx$<br>$б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$<br>$в)\int_{1}^{e}x^3\ln xdx$ | №1. Вычислить интегралы:<br>$a)\int_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$<br>$б)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$<br>$в)\int_{0}^{5}xe^{x}dx$ |
| **ВАРИАНТ №3** | **ВАРИАНТ №4** |
| №1. Вычислить интегралы:<br>$a)\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx$<br>$б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$<br>$в)\int_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx$ | №1. Вычислить интегралы:<br>$a)\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$<br>$б)\int_{0}^{1}(e^x-4)^4e^xdx$<br>$в)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$ |

## Практическое занятие №5

**Тема: Применение определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.**

**Цель работы:** получить практические навыки вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения.

### 1. Краткие теоретические сведения

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, $y = 0,\ x = a,\ x = b$ называется ***криволинейной трапецией***.

**Определение.** *Предел интегральной суммы* $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *при* $n \to \infty$ *называется* ***определённым интегралом*** *от функции* $y = f(x)$ *и обозначается* $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

$a$ - нижний предел интегрирования,
$b$ - верхний предел интегрирования,
$f(x)$ - подынтегральная функция,
$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;
$[a;b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения определённого интеграла вытекает его геометрический смысл: *определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

**Свойства определённого интеграла.**

*Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого слагаемого.*

$$\int_a^b \left( f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

*Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

*При перестановке местами пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный.*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

*Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

*Отрезок интегрирования можно разбивать на части.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a \square c \square b$.

**Формула Ньютона - Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла.**

Вычисляют определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по ***формуле Ньютона - Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ **,у**

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбница применяется для вычисления определённого интеграла во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ по формуле Ньютона - Лейбница необходимо сначала найти первообразную $F(x)$, поэтому для вычисления определённого интеграла применяют те же приёмы, что и для нахождения неопределённого интеграла.

**Замена переменной в определённом интеграле.**

При вычислении определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ способом *замены переменной* данный интеграл с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ или $t=\psi(x)$ преобразуется в другой определённый интеграл с новой переменной интегрирования $t$ и являющийся табличным.

При этом старые пределы интегрирования $x_1=a$ и $x_2=b$ заменяются новыми пределы $t_1=\psi(a),\quad t_2=\psi(b)$.

Формула замены переменной в определённом интеграле выглядит следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

В данной формуле предполагается, что функции $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1;t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1;t_2]$.

*Замечание.* В отличие от интегрирования методом замены переменной в неопределённом интеграле при таком же способе интегрирования в интеграле определённом к старой переменной интегрирования не возвращаются.

**Интегрирование по частям в определённом интеграле.**

**Теорема.** *Если функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a;b]$, *то имеет место формула интегрирования по частям в определённом интеграле*

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$$

.

*Замечание 1.* При вычислении определённого интеграла по частям используются те же рекомендации при выборе функции $u$ и выражения $dv$, что и при применении данного метода для неопределённого интеграла.

*Замечание 2.* При вычислении определённого интеграла по частям пределы интегрирования не пересчитываются.

**Площадь криволинейной трапеции**, ограниченной непрерывной кривой y=$f$(x), двумя прямыми x=a и x=b и отрезком a≤x≤b оси абсцисс, вычисляется по формуле:

$S=\int_a^b f(x)dx,$ , если $f$(x)≥0 на отрезке от a до b.

$S=-\int_a^b f(x)dx$, если $f$(x)≤0 на отрезке от a до b.

$S=\int_a^b |f(x)|dx$, если $f$(x)конечное число раз меняет знак на отрезке от a до b.

$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$, если площадь фигуры, ограничена двумя непрерывными кривыми y=$f$(x) и y=g(x) и двумя прямыми x=a и x=b, где $f$(x) ≥ g(x) на отрезке от a до b.

**Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох** криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=$f$(x), осью абсцисс и двумя прямыми x=a и x=b (a‹b), находится по формуле: $V_x=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx,$

аналогично, **объем тела вращения вокруг оси Оу** криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой x=φ(y), осью ординат и двумя прямыми y =d и y=d (c‹d), находится по формуле: $V_y=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy,$

## 2. Методика решения типовых задач

**2.1** Непосредственное интегрирование.

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 5x^4dx$.

Решение. Применяя свойство 2 определённого интеграла, табличный интеграл 1 и формулу Ньютона - Лейбница, имеем:

$$\int_1^2 5x^4dx=5\int_1^2 x^4dx=5\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2=x^5\Big|_1^2=2^5-1^5=32-1=31.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.

Решение. Последовательно применим свойства 1 и 2 определённого интеграла, табличный интеграл и формулу Ньютона - Лейбница, получим:

$$\int\limits_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}}\right)dx = 3\int\limits_0^4 xdx - \int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^4 - 4e^{\frac{x}{4}}\Bigg|_0^4 = \frac{3\cdot 4^2}{2} - 4\cdot e^{\frac{4}{4}} + 4e^{\frac{0}{4}} = 28 - 4e$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x\sin x}{x}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель, применим свойство определённого интеграла 1 и табличные интегралы, получим

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x\sin x}{x}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{x} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin xdx = \ln x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln\pi - \ln\frac{\pi}{2} + \cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} = \ln 2 - 1$$

**а.** *Замена переменного*:

Пример 4. Вычислить $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{3}, \quad dx = \frac{2t}{3}dt$.

Пересчитаем пределы интегрирования:

$$t_1 = \sqrt{1+3\cdot 0} = 1, \quad t_2 = \sqrt{1+3\cdot 5} = 4,$$

получаем

$$\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \int\limits_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}\cdot\frac{2t}{3}dt}{t} = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^2 - 1\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3} - 4\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{52}{3} + \frac{4}{27} = \frac{108}{27} = 4.$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 1+tgx \Rightarrow dt = (1+tgx)' dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$ и найдём новые пределы интегрирования

$$t_1 = 1+tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1-1 = 0, \quad t_2 = 1+tg\frac{\pi}{4} = 1+1 = 2,$$

тогда получим

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx = \int\limits_0^2 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - 0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

*b. Интегрирование по частям:*

Пример 8. Вычислить $\int\limits_1^e x\ln xdx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$, тогда имеем:

$$\int\limits_1^e x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$$

Пример 9. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3xdx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому примем $u = 2-x \Rightarrow du = -dx, \quad dv = \sin 3xdx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x$,

тогда получим:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3xdx = -\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3xdx = -\frac{1}{3}\left(2-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{2} +$$

$$\frac{1}{3}(2-0)\cos 0-\frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=0+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{9}\sin 0=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

**2.4** Пример 10. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями*

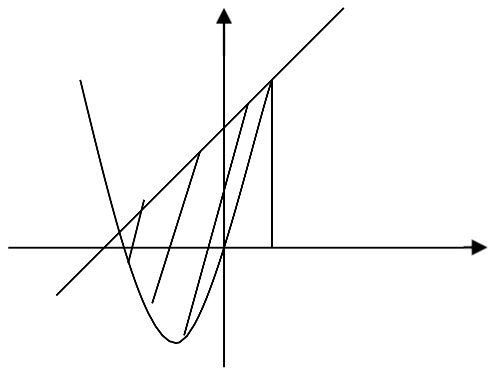
$y=x^2+4x,\ x-y+4=0$

$y=x+4$

Решение.

$$\begin{cases} y=x^2+4x \\ y=x+4 \end{cases}\Rightarrow x_1=-4,\ x_2=1$$

$$S=\int_{-4}^{1}(x+4-x^2-4x)dx=\int_{-4}^{1}(4-3x-x^2)dx=4x-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{1}=\left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-16-\frac{48}{2}+\frac{64}{3}\right)=\frac{125}{6}$$



**2.5** Пример 11. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{4}{x}$, прямыми х=3, х=12 и осью абсцисс.

Решение. Пользуясь формулой для вычисления объема, находим

$$V_x=\pi\int_3^{12}\left[\frac{4}{x}\right]^2dx=16\pi\int_3^{12}\frac{dx}{x^2}=-16\pi\frac{1}{x}\Big|_3^{12}=-16\pi\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)=4\pi\ \text{(куб.ед.)}$$

### 3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

### 4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

## 5. Контрольные вопросы

5.1 Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
5.2 Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры при помощи определенного интеграла.
5.3 Запишите формулу для вычисления объема тела вращения.

## 6. Список справочной литературы


6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.


## ПРИЛОЖЕНИЕ

| ВАРИАНТ №1 | ВАРИАНТ №2 |
| --- | --- |
| №1. Вычислить интегралы:<br>$a)\int_{-1}^{1}(6x^2-2x-5)dx$<br>$б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$<br>$в)\int_{1}^{e}x^3\ln xdx$<br>№2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.<br>$y=2x^2$,<br>$y=3x+2$. Сделать чертеж.<br>№3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\sqrt{x-2}$, прямыми x=2, x=4 и осью абсцисс. Сделать чертеж.<br>№4 Вычислить путь, пройденный телом.<br>$V=3t^2+1$,<br>$t_1=0,\ t_2=4$ | №1. Вычислить интегралы:<br>$a)\int_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$<br>$б)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$<br>$в)\int_{0}^{5}xe^{x}dx$<br>№2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.<br>$y=-x^2-2$,<br>$y=-4x+1$. Сделать чертеж.<br>№3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\frac{3}{x}$, прямыми x=3, x=6 и осью абсцисс. Сделать чертеж.<br>№4 Вычислить путь, пройденный телом.<br>$V=2t^2+t$,<br>$t_1=1,\ t_2=3$. |

| **ВАРИАНТ №3** | **ВАРИАНТ №4** |
|---|---|
| №1. Вычислить интегралы: <br> $a)\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx$ <br> $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$ <br> $в)\int_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx$ <br> №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. <br> $y=x^2-5x,$ <br> $y=x-5.$ Сделать чертеж. <br> №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=-\frac{2}{x}$, прямыми х=1, х=2 и осью абсцисс. Сделать чертеж. <br> №4 Вычислить путь, пройденный телом. <br> $V=6t+4,$ <br> $t_1=2,\ t_2=3.$ <br> . | №1. Вычислить интегралы: <br> $a)\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ <br> $б)\int_{0}^{1}(e^x-4)^4e^xdx$ <br> $в)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin\ xdx$ <br> №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. <br> $y=x^2+6,$ <br> $y=-6x+1.$ Сделать чертеж. <br> №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной прямой $y=3x-1$, прямыми х=1, х=3 и осью абсцисс. Сделать чертеж. <br> №4. Вычислить путь, пройденный телом. <br> $V=t^2-t+3,$ <br> $t_1=0,\ t_2=5.$ |

## Практическое занятие №6

**Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и линейных дифференциальных уравнений первого порядка.**

**Цель работы**: сформировать навыки решения дифференциальных уравнений различных видов. Научиться находить общее и частное решение.

### 1. Краткие теоретические сведения.

*1. Чтобы решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными* $f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$:

- *разделить переменные*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}$$

- *взять интеграл от левой и правой части*

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$$

*При решении линейных уравнений используют метод вариации постоянной (смотри решение примеров)*

### 2. Методика решения типовых задач.

*2.1 Задача 1. Решить уравнение* $\cos x \cos y dx = \sin x \sin y dy$

*Решение*

$$\cos x \cos y dx = \sin x \sin y dy$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{\sin y}{\cos y}dy$$

$$\ln|\sin x| + c = -\ln|\cos y|$$

$$\ln|c * \sin x| = \ln|\cos y|^{-1}$$

$$\frac{1}{\cos y} = c * \sin x$$

$\cos y = \dfrac{1}{c * \sin x}$ - *общее решение дифференциального уравнения.*

*2.2 Задача 2. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения*
$(1+y)dx=(1-x)dy$ *при* $x=-2$

*Решение*

$$\int\frac{dx}{1-x}=\int\frac{dx}{1+y}$$

$$-\ln|1-x||+c=\ln|1+y|$$

$$\ln|c|*\sin x|=\ln|1+y|$$

$$\ln\left|\frac{c}{1-x}\right|=\ln|1+y|$$

$1+y=\dfrac{c}{1-x}$ - *общее решение дифференциального уравнения.*

*Найдём «с»*

$$1+3=\frac{c}{1+2}\Rightarrow c=12$$

$1+y=\dfrac{12}{1-x}$ - *частное решение дифференциального уравнения.*

*2.3 Задача 3. Решить уравнение* $y'-y*ctgx=\dfrac{1}{six}$

*Решение.*

*Воспользуемся подстановкой*

$$y=u*v$$

$$y'=u'v+uv'$$

$$u'v+uv'-uvctgx=\frac{1}{\sin x}$$

$$v(u'-uctgx)+uv'=\frac{1}{\sin x}$$

$$\begin{cases} u'-uctgx=0 \\ uv'=\dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

1) $u'-uctgx=0$

$$\frac{du}{dx}=uctgx$$

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$\ln|u|=\ln|\sin x|$$

$$u=\sin x$$

2) $uv=\dfrac{1}{\sin x}$

$$\sin x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{\sin x}$$

$$\int dv=\int\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$v=-ctgx+c$$

$y=\sin x(-ctgx+c)$ - *общее решение дифференциального уравнения.*

**3. Порядок выполнения практической работы.**

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта. (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы.

**4. Содержание отчёта**

4.1 Тема и цель занятия.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

**5. Контрольные вопросы**

5.1 В чём состоит задача Коши?
5.2 Какая подстановка используется при решении линейных уравнений?

**6. Список справочной литературы**

6.1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика. Учебник. - М: Дрофа, 2011-395с.
6.2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. Учебное пособие. – М: Дрофа, 2011-204с.
6.3. Конспект лекций.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**1 вариант**

*Решить дифференциальные уравнения*

1) $2y\,dx-x(1+x)\,dy=0$

2) $(1+x^2)\,dy-2xy\,dx=0$

3) $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$

*y=1 при x=1*

4) $y'-y=\frac{1+x^2}{x}*e^x$

5) $y'-y\,ctg\,x=\sin x$

**2 вариант**

*Решить дифференциальные уравнения*

1) $y\,dx+(1-y)x\,dy=0$

2) $(1+x^2)\,dy-(xy+x)\,dx=0$

3) $y^2\,dx=e^x\,dy$

*y=1 при x=0*

4) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$

5) $y'+\frac{y}{x}=\frac{e^{-x}}{x}$

**3 вариант**

*Решить дифференциальные уравнения*

1) $3y\,dx-(1+y)x\,dy=0$

2) $(y^2+x)\,dx+(x^2-y)\,dy$

3) $\cos x\,dy-(y+1)\sin x\,dx=0$

$y=\frac{\pi}{4}$ *при* $x=\frac{\pi}{4}$

4) $y'-\frac{2y}{x}=-\frac{3}{x^2}$

5) $y'-ytg=\frac{1}{\cos x}$

**4 вариант**

*Решить дифференциальные уравнения*

1) $(1+x)\,dy-y(2+y)\,dx=0$

2) $(y-x^2y)\,dy+(x+xy^2)\,dx$

3) $(x+3)\,dy+y(y-2)\,dx=0$

*y=1 при x=1*

4) $y'+\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

5) $y'-\frac{2y}{x}=x^2e^x$

## Практическое занятие №7

**Тема: Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.**

**Цель работы:** получить практические навыки решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

### 1. Краткие теоретические сведения

**Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

***Линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами*** называется уравнение вида

$$ay' + by' + cy = 0,$$

где
$a, b, c$ - числа, называемые коэффициентами уравнения,
$y$ - неизвестная функция.

Чтобы решить уравнение

$$ay' + by' + cy = 0$$

нужно составить и решить характеристическое уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от корней характеристического уравнения, а именно:

1. Если корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2$ $(D \square 0)$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где
$k_1$, $k_2$ -корни характеристического уравнения,
$C_1$, $C_2$- произвольные постоянные.

2. Если характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2$ $\quad (D = 0)$, , то решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{kx}\left(C_1 x + C_2\right).$$

3. Если корни характеристического уравнения являются комплексно сопряжёнными $k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i \quad (D \square 0)$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

## 2. Методика решения типовых задач

**2.1** Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$. Его корни $k_1 = -2, \quad k_2 = 1,$ . Т.к. корни действительные и различные, то общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет равные корни

$$k_1 = k_2 = 2,$$

следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет комплексно-сопряжённые корни: $k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i$ , Таким образом, общее решение записывается в виде

$$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\left(\mathrm{A}\cos 2\mathrm{x} + \mathrm{B}\sin 2\mathrm{x}\right).$$

Найдём частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям. Из первого начального условия следует, что

$$0=\mathrm{e}^{0}\left(\mathrm{A}\cos 0+\mathrm{B}\sin 0\right)\Rightarrow \mathrm{A}\cos 0=0\Rightarrow \mathrm{A}=0.$$

Найдём $y'$:

$$y'=-e^{-x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)+e^{-x}\left(2B\cos 2x-2A\sin 2x\right)=$$
$$=e^{-x}\left(2B\cos 2x-2A\sin 2x-A\cos 2x-B\sin 2x\right)=$$
$$=e^{-x}\left(\left(2B-A\right)\cos 2x+\left(-A-B\right)\sin 2x\right).$$

и подставим во второе начальное условие, получим

$$1=\left(2B-A\right)\cos 0+\left(-2A-B\right)\sin 0,$$

откуда, учитывая, что $\mathrm{A}=0$, получим

$$2B=1\Rightarrow B=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x.$$

Пример 4. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'+2y'+2y=0,$ проходящую через точку M(0;1) и касающуюся в этой точке прямой y=x+1.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2+2k+2=0;$ его корни $x_1=1+i$ и $x_2=1-i$ являются комплексно-сопряжёнными, поэтому уравнение множества интегральных кривых запишется следующим образом

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Найдём уравнение искомой интегральной кривой, для чего в равенства

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x), y'=e^{-x}((C_2-C_1)\cos x+(C_2+C_1)\sin x)$$

подставим значение y=1 и углового коэффициента касательной $y'=k=1$ в точке x=0. В результате получим систему уравнений для определения постоянных $C_1$ и $C_2$ :

$$\begin{cases}C_1=1,\\ C_2-C_1=1\end{cases}\Rightarrow C_1=1,\quad C_2=2.$$

Подставив эти значения в общее решение, получим уравнение искомой интегральной кривой

$$y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x).$$

## 3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

## 4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

## 5. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
5.2 Что называется характеристическим уравнением?
5.3 Какие возможны случаи для решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

## 6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

| ВАРИАНТ №1 | ВАРИАНТ №2 |
|---|---|
| №1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:<br>1) $y' - 7y' + 10y = 0$<br>2) $y' - 5y' = 0$<br>3) $y' - 9y = 0$<br>4) $y' - 8y' + 16y = 0$<br>5) $y' - 6y' + 25y = 0$ | №1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:<br>1) $y' + y' - 6y = 0$<br>2) $y' + 3y' = 0$<br>3) $y' - 4y = 0$<br>4) $y' - 6y' + 9y = 0$<br>5) $y' - 2y' + 5y = 0$ |

| | |
|---|---|
| №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям:<br><br>$y' - 2y' - 3y = 0$, y=8 при x=0 и $y' = 0$ | №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям:<br><br>$y' + y' - 20y = 0$, $y = \frac{9}{5}$ при x=0 и $y' = 0$ |
| **ВАРИАНТ №3** | **ВАРИАНТ №4** |
| №1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:<br>1) $y' - 8y' + 15y = 0$<br>2) $y' - y' = 0$<br>3) $y' - 25y = 0$<br>4) $y' + 2y' + y = 0$<br>5) $y' - 4y' + 7y = 0$<br><br>№2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям:<br><br>$y' + 8y' + 16y = 0$, y=1 при x=0 и $y' = 1$ | №1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:<br>1) $y' + 5y' + 6y = 0$<br>2) $y' + 2y' = 0$<br>3) $y' - y = 0$<br>4) $y' - 4y' + 4y = 0$<br>5) $y' - 6y' + 13y = 0$<br><br>№2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям:<br><br>$y' - 10y' + 25y = 0$, y=2 при x=0 и $y' = 8$ |

## Практическое занятие №8

**Тема: Исследование на сходимость рядов с положительными членами по признаку Даламбера и знакопеременных рядов по признаку Лейбница.**

**Цель работы:** получить практические навыки использования признаков Даламбера, Коши, Лейбница для определения сходимости или расходимости числовых рядов.

### 1. Краткие теоретические сведения

**Признак Даламбера:**

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Если q>1, то ряд расходится.

Если q<1, то ряд сходится.

**Признак Коши (радикальный):**

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Если q>1, то ряд расходится.

Если q<1, то ряд сходится.

**Признак Лейбница (для знакочередующегося ряда):**

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

Ряд сходится, если выполняются два условия:

1) элементы ряда по абсолютной величине монотонно убывают;
2) предел общего члена ряда равен нулю.

**Степенным рядом называется ряд вида**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

**Чтобы найти интервал сходимости степенного ряда надо:**

1) применить признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из модулей;
2) исследовать сходимость ряда на концах интервала.

### 2. Методика решения типовых задач

**2.1** Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

Решение.

$$a_n=\frac{n}{3^n},\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}$$

*Т. к.* $\frac{1}{3}<1$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ *сходится по признаку Даламбера.*

**2.2** Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

Решение.

$$a_n=\frac{n!}{10^n},\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,10^n}{10^{n+1}\,n!}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

*Т. к.* $\infty>1$*, то ряд расходится по признаку Даламбера.*

**2.3** Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n+\ldots$$

Решение

$$a_n=\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=$$

*Т.к.* $2>1$*, то ряд расходится по признаку Коши.*

**2.4** Задача 4. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2+1}+\ldots$$

Решение.

Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\ldots$ и общий член ряда стремится к нулю $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$, то в силу признака Лейбница ряд сходится.

**2.5** Задача 5.Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$

б) $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$

Решение.

а) Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot n}{(n+1)\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Таким образом ряд расходится абсолютно.

б)Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$ *расходится как общегармонический (т.к.* $\frac{1}{3}<1$*).*

Следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся. Исследуем его на условную сходимость.

Ряд $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$ *сходится (по признаку Лейбница), так как*

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\dots;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$$

Итак, данный ряд сходится условно.

## 3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

## 4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

## 5. Контрольные вопросы

5.1 Какой признак применим для знакочередующихся рядов?

5.2 Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
5.3 Какой ряд называется условно сходящимся?

## 6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

| ВАРИАНТ №1 | ВАРИАНТ №2 |
|---|---|
| №1.Исследовать на сходимость ряды<br>1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$<br>2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$<br>3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$<br>4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$ | №1. Исследовать на сходимость ряды<br>1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$<br>2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{5^n}$<br>3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$<br>4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ |
| **ВАРИАНТ №3** | **ВАРИАНТ №4** |
| №1.Исследовать на сходимость ряды<br>1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$<br>2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$<br>3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$<br>4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n}$ | №1 Исследовать на сходимость ряды<br>1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$<br>2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$<br>3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{4n-1}\right)^{n^2}$<br>4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ |

## Практическое занятие №9

## Тема: Решение задач по теории вероятностей.

**Цель занятия:** отработать навык решения задач по данной теме.

**2. Перечень справочной литературы:**

**2.1.** Конспект

**2.2.** Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для СПО.- М.: Академия, 2017*(Основное печатное издание – ОПИ 1.).*

**2.3** Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Сборник задач профильной направленности: Учебное пособие для СПО.- М.: Академия, 2018.- 208с. *(Основное печатное издание – ОПИ 2.).*

**3. Краткие теоретические сведения:**

1. Элементы комбинаторики.

Размещения – упорядоченные выборки $k$ элементов из $n$ $(k \le n)$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки – выборки, которые отличаются только порядком расположения элементов.

$$\mathrm{P}_n = n! \quad \left(\mathrm{P}_n = A_r^n\right)$$

Сочетания – неупорядоченные выборки $k$ элементов из $n$ элементов $(k \le n)$. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ или $C_n^k = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$

Бином Ньютона: $(a+b)^n = C_n^o a^n b^o + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 + ... + C_n^n a^o b^n$, где $C_n^k$ –биноминальные коэффициенты.

2. Элементы теории вероятности.

Пусть $A$ – событие, его вероятность, $\mathrm{P(A)} = \dfrac{m}{n}$, где $m$ – число исходов благоприятствующих событию $A$, $n$ – число всех исходов.

Если $A$ и $B$ несовместные события, то:

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

Если $A$ и $B$ – произвольные события, то:

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$$

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A / B)$$

**Примеры решения задач:**

Задание 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{C_x^y}{C_x^2} = \dfrac{C_x^{y+2}}{66} \end{cases}$$

1) $C_x^2 = 66$,

$$\frac{x\cdot(x-1)}{2!} = 66$$

$$x^2 - x = 132$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

$$x_1 = 12$$

$x_2 = -11$ – посторонний корень т.к. $x \rangle 2$.

2) используя формулу ( $C_n^k = C_n^{n-k}$ )

$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2}$, откуда

$$12 - y = y + 2,$$

$$y = 5$$

Ответ: $x = 12, y = 5$

Задание 2.

Решить уравнение $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$

$\dfrac{(n-2)!}{(n-5)!} = 4\cdot\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}$ откуда $n-2=4$, $n=6$.

Задание 3.

В урне 12 белых и 8 черных шаров. Вынимают на удачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

$C_{20}^2 = \dfrac{20!}{18!2!} = \dfrac{19\cdot 20}{2} = 190$ – число возможных случаев сочетаний по два.

$C_8^2 = \dfrac{8!}{6!2!} = \dfrac{7\cdot 8}{2} = 28$ – число возможных случаев появления двух черных шаров.

$\mathrm{P} = \dfrac{28}{190} = \dfrac{14}{95} = 0{,}147$ – вероятность появления двух черных шаров.

Задание 4.

У продавца имеется 10 красных, 8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Вычислить вероятность того, что купленный шар окажется красным, синим или зеленым.

Пусть событие $A$ – купленный шар красный

событие $B$ – купленный шар синий

событие $C$ – купленный шар зеленый.

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{10}{38}, \mathrm{P}(B) = \dfrac{8}{38}, \mathrm{P}(C)\dfrac{5}{38}$.

Так как события $A, B, C$ несовместны, то

$$\mathrm{P}(A+B+C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) = \frac{10}{38} + \frac{8}{38} + \frac{5}{38} = \frac{23}{38} \approx 0{,}605.$$

Задание 5.

В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Пусть событие $A$ – из 1-ой урны извлечен белый шар, событие $B$ – из 2-ой урны извлечен белый шар. Очевидно, события А и В независимы.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{7}{12}.$$

$$\mathrm{P}(AB) = P(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

**4. Задания:**

Вариант 1

1. Вычислить: $A_{10}^{4}, C_{15}^{13}, A_{7}^{3} + A_{6}^{3} + A_{5}^{3}.$
2. Решить уравнение: $C_{x}^{2} = 153$
3. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Найти вероятность того, что
а) наудачу вынутый шар окажется черным;
б) два наудачу вынутых шара окажутся черными.
4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся белыми

Вариант 2

1. Вычислить: $A_{5}^{8}, C_{12}^{9}, A_{5}^{2} \cdot A_{4}^{2} \cdot A_{3}^{2}.$
2. Решить уравнение: $C_{x}^{2} - 2 = 21$
3. В урне 9 синих и 13 зеленых шаров. Найти вероятность того, что
а) наудачу вынутый шар окажется зеленым;
б) два наудачу вынутых шара окажутся зелеными;
4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся черными.

Вариант 3

1. Вычислить: $A_{12}^{5}, C_{8}^{3}, C_{6}^{4} + C_{5}^{0}.$
2. Решить уравнение: $A_{2x}^{3} = 14 \cdot A_{x}^{3}$
3. В урне 8 красных и 10 синих шаров. Найти вероятность того, что
а) наудачу вынутый шар окажется синим;
б) два наудачу вынутых шара окажутся синими;
4. В одной урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, а в другой 6 белых и 8 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся белыми.

Вариант 4

1. Вычислить: $A_{10}^{3}, C_{12}^{8}, \dfrac{A_{6}^{5} + A_{6}^{4}}{A_{6}^{3}}$

2. Решить уравнение: $A_x^3 = 12x$

3. В урне 7 белых и 9 черных шаров. Найти вероятность того, что

а) наудачу вынутый шар окажется белым;

б) два наудачу вынутых шара окажутся белыми;

4. В одной урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, а в другой 6 белых и 8 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся черными.

**5. Порядок выполнения работы:**

**5.1.** Изучить краткие теоретические сведения

**5.2.** Решить задания своего варианта

**6. Содержание отчета:**

**6.1.** Тема и цель занятия

**6.2.** Решение заданий

**6.3.** Ответы на контрольные вопросы

**7. Контрольные вопросы:**

1. Чему равна вероятность достоверного события?
2. Чему равна вероятность невозможного события?

## Практическое занятие №10

**Тема: Вычисление абсолютной и относительной погрешности приближенного числа. Учет погрешностей и правила действий с приближенными числами.**

**Цель занятия:** научиться вычислять абсолютную и относительную погрешность, округлять числа. Научиться практически применять абсолютную и относительную погрешности.

**2. Перечень справочной литературы:**

**2.1.** Конспект

**2.2.** Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для СПО.- М.: Академия, 2017*(Основное печатное издание – ОПИ 1.).*

**2.3** Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Сборник задач профильной направленности: Учебное пособие для СПО.- М.: Академия, 2018.- 208с. *(Основное печатное издание – ОПИ 2.).*

**3. Краткие теоретические сведения:**

$x$ – точное значение, $a$ – приближенное значение.

$|x-a| = \Delta x$ - абсолютная погрешность приближения.

Число $\Delta x$ называют границей абсолютной погрешности приближенного числа $a$.

$x = a \pm \Delta x \Leftrightarrow a - \Delta x \le x \le a + \Delta x$

$\frac{|\Delta x|}{|a|} = \frac{|x-a|}{|a|}$ - относительная погрешность приближения.

Правило округления чисел с наименьшей погрешностью:

1) единицы младших разрядов отбрасываются;

2) число единиц данного разряда не меняется, если следующая цифра данной дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Погрешность суммы: граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых, т.е. если $x \approx a$ с точностью до $h_1$, $y \approx в$ с точностью до $h_2$, то $x + y \approx a + в$ с точностью до $h = h_1 + h_2$ .

Погрешность разности: граница абсолютной погрешности разности приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е. если $x \approx a$ с точностью до $h_1$, $y \approx в$ с точностью до $h_2$, то $x - y \approx a - в$ с точностью до $h = h_1 + h_2$ .

**Примеры решения задач:**

Задание 1.

Даны приближенные значения числа: $x = \frac{2}{3}; a_1 = 0{,}6; a_2 = 0{,}66; a_3 = 0{,}67.$

Какое из этих трех приближений является лучшим?

$\Delta x_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \frac{1}{15}$, $\Delta x_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \frac{1}{150}$, $\Delta x_3 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right| = \frac{1}{300}$

Лучшим приближенным числа $x$ является $a_3 = 0{,}67.$

Задание 2.

Граница абсолютной погрешности приближенного значения 386 числа $x$ равна 0,5. Укажите границы, в которых заключено число $x$.

*386 – 0,5 = 385,5; 386 + 0,5 = 386,5*

$385{,}5 < x < 386{,}5$

Задание 3.

При измерении длины $l$ и диаметра $d$ получили:

$l = (10{,}0 \pm 0{,}1)$м, $d = (2{,}5 \pm 0{,}1)$мм.

Какое из этих измерений точнее?

Их относительные погрешности:

$\frac{0{,}1}{10} = 0{,}01$ и $\frac{0{,}1}{2{,}5} = 0{,}04$

Следовательно, измерение длины проводника выполнено точнее.

Задание 4.

Пусть $x$ = 274,61. Выполнить округление до десятых, единиц, десятков и сотен (с наименьшей погрешностью).

Согласно правилу округления десятичных дробей имеем: 274,6; 275; 270; 300.

Ошибки этих округлений соответственно равны: 0,01; 0,39; 4,61; 25,39.

Задание 5.

Найти периметр треугольника $ABC$, если $|AB| = 63{,}4 \pm 0{,}1$,

$|BC| = 47{,}8 \pm 0{,}1$, $|AC| = 73{,}1 \pm 0{,}1$

$P = |AB| + |BC| + |AC|$

$P \approx 63{,}4 + 47{,}8 + 73{,}1 = 184{,}3$ с точностью до $h = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3$

$P = 184{,}3 \pm 0{,}3$

## 4. Задания:

**4.1.** Найти абсолютную и относительную погрешность приближенного значения $a$ величины $x$.

Вариант 1

$x = \frac{5}{3}; a = 1,6$

Вариант 2

$x = -\frac{5}{3}; a = 1,66$

Вариант 3

$x = \frac{3}{11}; a = 0,273$

Вариант 4

$x = \frac{3}{11}; a = 0,2727$

**4.2.** Найти границы числа.

Вариант 1

Амперметр дает точность ± 0,02 А. При измерении силы тока получили 10,63 А. Укажите границы этого числа.

Вариант 2

Атомная масса водорода 1,0082 ± 0,005. Укажите границы этого числа.

Вариант 3

Атомная масса меди 63,44 ± 0,15. Укажите границы этого числа.

Вариант 4

Площадь квадрата равна 24,5 ± 0,3 см$^2$. Найти границы измерения площади квадрата.

**4.3.** Найти сумму приближенных значений чисел.

Вариант 1.

Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями:

$ч_1$= 4,8 ± 0,05 Ом,

$ч_2$= 6,25 ± 0,005 Ом,

$ч_3$= 7,725 ± 0,0005 Ом.

Вычислить общее сопротивление цепи по формуле $R= ч_1+ ч_2+ ч_3$

Вариант 2

В треугольнике $ABC$:

$AB$= 6,8 ± 0,05 см,

$BC$= 4,3 ± 0,05 см,

$AC$= 3,575 ± 0,005 см.

Найти периметр треугольника $ABC$.

Вариант 3

Показания трёх амперметров:

$I_1$= 6,8 ± 0,05 А,

$I_2$=4,3 ± 0,05 А,

$I_3$=3,575 ± 0,005 А.

Найти общую силу тока по формуле $I= I_1 + I_2 + I_3$

Вариант 4

Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями:

$ч_1$= 6,54 ± 0,005 Ом,

$ч_2$= 10,022 ± 0,0005 Ом,

$ч_3$= 15,46 ± 0,05 Ом.

Вычислить общее сопротивление цепи по формуле $R= ч_1+ ч_2+ ч_3$

**5. Порядок выполнения работы:**

**5.1.** Изучить краткие теоретические сведения.

**5.2.** Решить задания своего варианта.

**6. Содержание отчета:**

**6.1.** Тема и цель занятия

**6.2.** Решение заданий

**6.3.** Ответы на контрольные вопросы

**7. Контрольные вопросы:**

**7.1.** В чём состоит правило сложения и вычитания приближенных значений?

**7.2.** Что называется границей абсолютной погрешности?