

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Степанов Павел Иванович  
Должность: Руководитель НИО НИЯУ МИФИ  
Дата подписания: 27.02.2026 09:49:59  
Уникальный программный ключ:  
8c65c591e26b2d8e460927740cf752622aa3b295

# НОВОУРАЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЯУ МИФИ

Кафедра общенаучных дисциплин

## Фонд оценочных средств

по дисциплине

## Математика

1 – 3 семестры

Учебно – методическое пособие  
для всех специальностей всех форм обучения

Новоуральск 2025

УДК 5190– 66  
ББК 22.171

МиМ – 2.3. – \_\_\_\_\_ –24

Фонд оценочных средств (ФОС) по дисциплине  
МАТЕМАТИКА 1 – 3 семестры

Учебно – методическое пособие для всех специальностей всех форм обучения.  
Новоуральск, изд. НТИ НИЯУ МИФИ. – 28 с.

Пособие составлено ст. преподавателем кафедры общенаучных дисциплин  
НТИ НИЯУ МИФИ Орловым Юрием Владимировичем.

Пособие содержит по два варианта контрольных работ по трём семестрам  
курса «Математика». Вместе с ними приведены вопросы экзамена по каждому  
из трёх семестров и пример экзаменационного билета.

Пособие обсуждено на заседании кафедры общенаучных дисциплин  
НТИ НИЯУ МИФИ и рекомендовано к использованию в учебном процессе  
всех специальностей всех форм обучения.

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

Зав. кафедрой ОНД, к.ф.м.н. \_\_\_\_\_ Н.А. Носырев

## Содержание:

| № | Содержание                                                 | Стр. |
|---|------------------------------------------------------------|------|
| 1 | 1 семестр                                                  |      |
|   | 1.1 Контрольная работа по теме «Матрицы. Векторы» .....    | 4    |
|   | 1.2 Контрольная работа по теме «Линии и поверхности» ..... | 6    |
|   | 1.3 Вопросы экзамена по 1-му семестру .....                | 8    |
|   | 1.4 Пример экзаменационного билета по 1-му семестру .....  | 10   |
| 2 | 2 семестр                                                  |      |
|   | 2.1 Контрольная работа 2.1 .....                           | 11   |
|   | 2.2 Контрольная работа 2.2 .....                           | 13   |
|   | 2.3 Вопросы экзамена по 2-му семестру .....                | 14   |
|   | 2.4 Пример экзаменационного билета по 2-му семестру .....  | 17   |
| 3 | 3 семестр                                                  |      |
|   | 3.1 Контрольная работа 3.1 .....                           | 18   |
|   | 3.2 Контрольная работа 3.2 .....                           | 19   |
|   | 3.3 Вопросы экзамена по 3-му семестру .....                | 21   |
|   | 3.4 Пример экзаменационного билета по 3-му семестру .....  | 24   |

# 1-й семестр

**Контрольная работа №1.1 по темам «Матрицы. Векторы»**  
 выдаётся на 2 неделе, сдача на 10 неделе 1-го семестра

**№1(3 балла)** Для матриц A, B, C (см. таблицу) найти  $2 \cdot A^T - B \cdot C$

**1 вариант**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}:$

**2 вариант**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

**№2 (9 баллов)** Найти решение системы

1) Методом Крамера; 2) Методом Гаусса или Жордана-Гаусса.

3) Матричным методом (проверив  $A^{-1}$  умножением на A);

$$\text{1 вариант} \begin{cases} x + 2y + 3z = -9 \\ 4x + 2z + 5y = -3 \\ 3x - 19 - 4y = 3z \end{cases} \quad \text{2 вариант} \begin{cases} -2x + 2y + 4z = -10 \\ 4x + 2y + 3z = 5 \\ 3z - 2y + 19 = 2x \end{cases}$$

**№3(3 балла)** Система трех уравнений от четырех неизвестных  $x_1, x_2, x_3, x_4$  в матричном виде имеет вид  $A \cdot X = B$ , матрицы A и B заданы.

Записать эту систему, найти её общее решение.

**1 вариант**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -9 \\ 5 & 4 & -6 & 11 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix};$

**2 вариант**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$

**№4(5 баллов)** В базисе  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  с модулями векторов  $|\vec{e}_1|, |\vec{e}_2|$  и углом между ними  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \varphi$  заданы векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найти

$|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos(\vec{a}, \vec{b}), \vec{a} \cdot \vec{b}, |\vec{a} \times \vec{b}|$

**1 вариант**  $|\vec{e}_1| = 4, |\vec{e}_2| = 7, \varphi = 30^\circ, \vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{b} = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

**2 вариант**  $|\vec{e}_1| = 4, |\vec{e}_2| = 5, \varphi = 60^\circ, \vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{b} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

**№5 (10 баллов)** Даны векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  (см. таблицу).

**Найти** для них

1)  $(\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}) + 3 \cdot (\vec{b} - 2 \cdot \vec{c})$  ;

2)  $(\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} - 3 \cdot \vec{b})$  ;

3) Косинусы углов и углы между а)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  , б)  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  , в)  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  ;

4)  $\vec{a} \times \vec{b}$  ;

5) Площадь треугольника построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  ;

6) Смешанное произведение  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  ;

7) Объем пирамиды построенной на  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  ;

8) Разложение вектора  $\vec{d}$  по векторам  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , если они образуют базис.

| Вариант | $\vec{a}$           | $\vec{b}$          | $\vec{c}$          | $\vec{d}$           |
|---------|---------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 1       | $\vec{a}=(1;-5;-1)$ | $\vec{b}=(5;-4;2)$ | $\vec{c}=(2;3;4)$  | $\vec{d}=(3;18;23)$ |
| 2       | $\vec{a}=(1;-1;1)$  | $\vec{b}=(1;2;2)$  | $\vec{c}=(2;3;-2)$ | $\vec{d}=(1;0;5)$   |

**Контрольная работа №1.2** по теме «Линии и поверхности»  
выдаётся на 15 неделе, сдача на 18 неделе 1-го семестра

**№6(4 балла)** Дана система трёх линейных неравенств с двумя переменными. Построить на плоскости  $xOy$  область, заданную системой неравенств. Для полученной области (треугольника) **найти**

- 1) Координаты всех вершин;
- 2) Один из внутренних углов;
- 3) Длину одного основания и высоты к такому основанию;
- 4) Площадь треугольника по основанию и высоте;
- 5) Площадь треугольника через векторное произведение;
- 6) Уравнения двух медиан;
- 7) Точку пересечения медиан (двумя способами).

$$\begin{array}{ll}
 \text{1 Вариант} \left\{ \begin{array}{l} 26x - 2y - 69 \leq 0 \\ 2x + 4y - 24 \leq 0 \\ 14x + y - 33 \geq 0 \end{array} \right. & \text{2 Вариант} \left\{ \begin{array}{l} 4x - 28y + 18 \geq 0 \\ 10x + 28y - 102 \leq 0 \\ 6x + 7y - 22 \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

**№7(6 баллов)** Даны четыре точки пространства:

$$A = (x_1; y_1; z_1), \quad B = (x_2; y_2; z_2), \quad C = (x_3; y_3; z_3), \quad D = (x_4; y_4; z_4).$$

В пирамиде  $ABCD$  **найти**

- 1) Общее уравнение грани  $ABC$ ;
  - 2) Уравнение грани  $ABC$  в отрезках;
  - 3) Уравнение плоскости, проходящей через  $D$  параллельно грани  $ABC$ ;
  - 4) Угол между рёбрами  $AB$  и  $BC$ ;
  - 5) Величину двугранного угла при ребре  $BC$ ;
  - 6) Угол между ребром  $AB$  и гранью  $BCD$ ;
  - 7) Каноническое и параметрическое уравнения ребра  $AB$ ;
  - 8) Длину ребра  $AB$ ;
  - 9) Длину высоты, опущенной из вершины  $D$  на плоскость  $ABC$ ;
  - 11) Площадь грани  $ABC$ ;
  - 12) Объём пирамиды по высоте и площади основания;
  - 13) Объём пирамиды с помощью смешанного произведения;
- (Вычисления производить с округлением до двух знаков после запятой, углы находить в градусах. )

| Вар | Точки            |               |                |                |
|-----|------------------|---------------|----------------|----------------|
|     | A                | B             | C              | D              |
| 1   | A= ( 1 ; 3 ; 6 ) | B=( 2; 2; 1 ) | C=(-1; 0; 1 )  | D=(-4; 6; -3 ) |
| 2   | A= (-4 ; 2 ; 6 ) | B=( 2;-3; 0 ) | C=(-10; 5; 8 ) | D=(-5; 2; -4 ) |

**№8(2 балла)**Изобразить кривую, заданную уравнением. **Определить** для кривой полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет, координаты центра и фокусов

**1 вариант** $\frac{1}{9} \cdot x^2 - \frac{1}{16} \cdot (y - 2)^2 = 1;$

**2 вариант** $\frac{1}{9} \cdot (x + 3)^2 + \frac{1}{16} \cdot (y - 2)^2 = 1.$

**№9 (3 балла)** Привести уравнение кривой к каноническому виду.

Построить линию, заданную уравнением

**1 вариант** $-98 - 8x^2 + 16x - 18y^2 + 108y = 0;$

**2 вариант** $25x^2 - 200x + 316 + 4y^2 - 16y = 0.$

### 1.3 ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНА по 1-му семестру

1. Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц.
2. Определители второго и третьего порядка: определение, правило вычисления и основные свойства. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента, раскрытие определителя по строке или столбцу.
3. Общее определение определителя  $n$ -го порядка. Задача о расстановке ладей на шахматной доске. Вычисление определителя четвертого порядка.
4. Обратная матрица: определение, теорема о существовании обратной матрицы (способ нахождения  $A^{-1}$ ), проверка полученного результата.
5. Система линейных уравнений, определение ее решения. Метод Крамера нахождения решений линейной системы. Теорема Крамера. Матричная запись линейной системы. Матричный метод нахождения решения линейной системы.
6. Метод Гаусса и Жордана-Гаусса решения линейной системы. Случаи единственного решения, множества решений и отсутствия решений.
7. Однородная линейная система, существование ее нетривиального решения, базисные и свободные переменные при этом.
8. Скалярные и векторные величины. Способы задания векторов. Действия над векторами (графически): сравнение, умножение на число, сумма и разность. Основные свойства действий над векторами.
9. Линейная зависимость системы векторов. Размерность векторного пространства (прямой, плоскости, пространства). Аффинный базис, аффинные координаты вектора, нахождение их геометрически.
10. Скалярное произведение векторов: определение, основные свойства. Косинус угла между векторами. Модуль вектора. Проекция вектора на ось.
11. Декартова система координат, базисные векторы. Декартовы координаты вектора, запись вектора через базисные. Связь точек и векторов. Сравнение, умножение на число, сумма, разность векторов в координатной форме.
12. Скалярное произведение векторов в декартовых координатах. Модуль вектора, расстояние между точками и угол между векторами в координатной форме.
13. Правая тройка векторов. Векторное произведение: определение и основные свойства, геометрический смысл, синус угла между векторами.
14. Векторное произведение двух векторов в координатной форме. Площадь треугольника, заданного координатами вершин с помощью векторного произведения.
15. Смешанное произведение: определение, основные свойства и правило вычисления в координатной форме, геометрический смысл, проверка линейной зависимости.



16. Способы задания линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве по Декарту и Жордану. Полярная система координат.
17. Уравнения прямой на плоскости: векторное, параметрическое, через две точки, каноническое, с угловым коэффициентом, общее, в отрезках и нормальное. Связь направляющего и нормального векторов прямой.
18. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (по уравнениям), параллельность, перпендикулярность, точка пересечения. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Проекция точки на прямую.
19. Уравнения плоскости в пространстве: векторное, параметрическое, через три точки (точку и два направляющих вектора), общее в отрезках и нормальное.
20. Связь нормального и направляющих векторов плоскости. Взаимное расположение плоскостей (параллельность, совпадение, пересечение, перпендикулярность) по уравнениям. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.
21. Уравнения прямой в пространстве: векторное, параметрическое, по двум точкам, каноническое, общее, через проектирующие плоскости.
22. Взаимное расположение прямой и плоскости: параллельность, пересечение, перпендикулярность, проекция точки на плоскость, симметрия точки относительно плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
23. Взаимное расположение двух прямых в пространстве по уравнениям: пересечение (точка пересечения), параллельность (расстояние), скрещивание (наименьшее расстояние).
24. Эллипс: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
25. Гипербола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
26. Парабола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
27. Общее уравнение линии второго порядка, приведение к каноническому уравнению по общему (при отсутствии  $x$  у) выделением полных квадратов.
28. Директориальное свойство эллипса и гиперболы, правило нахождения их канонического уравнения.
29. Нахождение уравнения окружности по трем точкам.
30. Классификация линий второго порядка на плоскости. Цилиндрические и конические сечения.
31. Канонические уравнения и эскизы поверхностей второго порядка: эллипсоида, гиперboloидов, параболоидов.
32. Линейчатые поверхности (гиперboloид и параболоид). Цилиндрические и конические поверхности. Классификация поверхностей второго порядка.
33. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимнообратных функций. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.

34. Преобразования, влияющие на график функции ( $f(x)+c$ ,  $f(x+c)$ ,  $c \cdot f(x)$ ,  $f(c \cdot x)$ ,  $|f(x)|$ ,  $f(|x-c|)$ ). Графики линейной, параболической, дробно-линейной функции и  $y=A \cdot \sin(\omega x + \omega_0)$ .

#### 1.4 ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА по 1-му семестру

НТИ НИЯУ МИФИ

Кафедра общенаучных дисциплин

### Экзаменационный билет №1

по предмету МАТЕМАТИКА, 1 СЕМЕСТР

1) Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц и свойства таких действий.

*Задача:* Вычислить  $A \cdot (2B - C^T)$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Парабола: определение, каноническое уравнение и уравнение со сдвигом вершины, свойства, построение.

*Задача:* Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой  $x=1$  и точки  $F(-5;1)$ . Построить эту линию.

3) В пирамиде ABCD с вершинами  $A=(-4; 2; 6)$ ,  $B=(2; -3; 0)$ ,  $C=(-10; 5; 8)$ ,  $D=(-5; 2; -4)$  найти уравнение плоскости, проходящей через D параллельно плоскости ABC.

Составил: \_\_\_\_\_ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: \_\_\_\_\_ Носырев Н.А.

Новоуральск 2024

## 2-й семестр

**Контрольная работа 2.1** выдаётся на 2 неделе, сдача на 13 неделе 2 семестра

### Вариант №1

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 - 4x^2 + 3x}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot (\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 + 1}) \right)$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x-3} \right)^{3x}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{2}{x+1} & \text{при } -1 < x < 0 \\ 3\sin(2x) & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов). Построить график.

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{\lg^3 2x \cdot (2x-1)^3}{\sqrt{1-x}};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 + t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (x^3 - 2)^{x-1}$ ; б)  $x^3 - 3xy + 2y^3 + 2y + 1 = 0$ ;

4. Вычислить приближенно

$$\lg(99);$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x+1}{x+3}$ ; б)  $s(t) = (2t+3) \cdot e^{-2(t+1)}$ .

## Вариант №2

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 + 4x}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x) - \sin(3)}{6 - 2x}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{x^2}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{при } x \leq -3 \\ \frac{1}{2x+6} & \text{при } -3 < x < 0 \\ (x-3)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов). Построить график.

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{(x^3 + 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2)}{\ln 3x};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 2$

$$\begin{cases} x = 3 - 4t^3 \\ y = e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (1 - 2x^3)^{\sin x + 1}$ ; б)  $\sin(2x) - x \cdot y^3 + 3y + 3 = 0$ ;

4. Вычислить приближенно

$$(1,95)^{10};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{2 - x^2}{x + 4}$ ; б)  $s(p) = \frac{e^{2(p+1)}}{2(p+1)}$ .

**№4 (5 баллов)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1.  $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8.$

2.  $y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 3).$

3.  $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

4.  $y = \sin x \cos^2 x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$

5.  $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$

**№5 (5 баллов)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1. 
$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 (y \geq 2). \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

**№6 (5 баллов)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в полярной системе координат

Вариант 1  $\rho(\varphi) = 4 \cos(3\varphi), \rho = 2 (\rho \geq 2);$

Вариант 2  $\rho(\varphi) = \sin(2\varphi).$

**№7 (5 баллов)** Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной графиком функции.

Вариант №1  $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0;$

Вариант №2  $2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0.$

## 2.3 Вопросы экзамена по 2-му семестру

1. Определение числовой последовательности и ее предела. Свойства пределов последовательности.
2. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимнообратных функций. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.
3. Преобразования, влияющие на график функции ( $f(x)+c$ ,  $f(x+c)$ ,  $c \cdot f(x)$ ,  $f(c \cdot x)$ ,  $|f(x)|$ ,  $f(|x-c|)$ ). Графики линейной, параболической, дробно-линейной функции и  $y=A \sin(wx+w_0)$ .
4. Определение предела функции в точке. Бесконечный предел и предел на бесконечности. Свойства пределов.
5. Бесконечно малая функция (БМ). Сравнение БМ: эквивалентность, символ "о". Первый замечательный предел, его применение. Основные эквивалентности БМ в пределах.
6. Бесконечно большая функция (ББ). Сравнение ББ: эквивалентность, символ "о". Шкала ББ при  $x \rightarrow \infty$ , её применение.
7. Связь БМ, ББ и других функций. Основные виды неопределенностей в пределах, способы их раскрытия. Второй замечательный предел, правило его применения.
8. Непрерывность функции в точке. Частичные пределы, их связь с непрерывностью. Точки разрыва функции, их классификация.
9. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства непрерывных в точке функций.
10. Свойства непрерывных на отрезке функций: сохранение знака, ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, поиск корня  $f(x)=0$  методом половинного деления, промежуточные значения.
11. Производная функции  $f(x)$ : определение, геометрический смысл с уравнением касательной и нормали, физический смысл. Свойства производных.
12. Производные основных функций ( $x^n$ ,  $a^n$ ,  $\ln(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ) с доказательствами.
13. Приращение дифференцируемой функции, понятие дифференциала и его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы дифференциала, его применение в приближенных вычислениях.
14. Производная обратной функции. Вывести производные  $\arcsin(x)$ ,  $\arctg(x)$ . Производная неявно заданной функции.

15. Логарифмическое дифференцирование. Понятие гиперболических функций, их производные.
16. Свойства дифференцируемых на отрезке функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
17. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, её коэффициенты и остаточный член в формах Пеано и Лагранжа.
18. вывести разложения  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $e^x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^n$  по формуле Маклорена.
19. Производные  $y'_x(x)$ ,  $y''_{xx}(x)$  для функции, заданной параметрически.
20. Определение точки экстремума. Связь монотонности функции и знака ее производной. Теорема Ферма (необходимое условие точек экстремума). Достаточные условия экстремума:
  - а) с помощью знака первой производной;
  - б) с помощью производных старших порядков.
21. Алгоритм нахождения точек экстремума. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, примеры задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.
22. Определение выпуклой (вогнутой) НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ. Связь выпуклости со знаком второй производной. Алгоритм нахождения точек перегиба.
23. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей в пределах.
24. Понятие асимптоты графика функций, их виды и способы нахождения.
25. Общий план исследования функций и построения графика функции.
26. Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на ОТРЕЗКЕ.
27. Решение текстовых задач на оптимизацию.
28. Определение первообразной для  $f(x)$  на  $[a; b]$ , теорема о двух первообразных. Неопределенный интеграл (НИ), его свойства. Таблица основных интегралов.
29. Определенный интеграл (ОИ) для  $f(x)$ , как предел интегральных сумм, его основные свойства, теорема о среднем.
30. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной.
31. Формула Ньютона-Лейбница и её применение.
32. Замена переменной в НИ и ОИ. Интегрирование по частям в НИ, ОИ, основные случаи.
33. Вычисление некоторых НИ методом неопределенных коэффициентов.
34. Дробно-рациональная функция, алгоритм ее разложения на сумму элементарных дробей:
  - а) выделение целой части, алгоритм "деление столбиком";

- б) разложение многочлена на неприводимые множители, кратность корня;
  - в) метод неопределенных коэффициентов разложения на элементарные дроби.
35. Интегралы от элементарных дробей. Общий план интегрирования дробно-рациональных функций.
  36. Интегралы от тригонометрических функций; Основные случаи и способы интегрирования данных интегралов.
  37. Интегралы от иррациональных функций. Примеры "неберущихся" интегралов.
  38. Нахождение площади криволинейной трапеции и площадей плоских фигур с помощью ОИ (ограниченных  $y_i=f_i(x)$ ; параметрически заданными).
  39. Площадь криволинейного сектора. Нахождение площади фигуры в полярных координатах.
  40. Объем тела по поперечным сечениям. Объем тела вращения с помощью ОИ.



НТИ НИЯУ МИФИ

Кафедра общенаучных дисциплин

## Экзаменационный билет №1

по курсу «Математика» 2 семестр

1) Вычислить пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \cdot \sin^2(3x)}{\arcsin(2x) \cdot (1 - \cos(x))} \right)$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-4}{x+7} \right)^{5x^2-x}$ .

2) Найти производные функций

а)  $S(p) = p^2 \cdot e^{3p-1}$ ;      б)  $x(y) = \frac{y^3}{3y-12} + \ln(3 + \sqrt{2})$ ;

3) Исследовать на асимптоты график функции  $f(x) = \frac{x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{x^2 - 9}$ ;

4) Найти  $\int \frac{2x-1}{x^2 + 4x - 12} dx$ ;

5) Вычислить площадь, ограниченную кривой  $\rho(\varphi) = 4 \sin^2(\varphi)$ .

Составил: \_\_\_\_\_ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: \_\_\_\_\_ Носырев Н.А.

Новоуральск 2024

### 3 семестр

Контрольная работа 3.1 по теме «Несобственные интегралы. Ряды»  
выдаётся на 2 неделе, сдача на 9 неделе 3-го семестра

**№1 (5 баллов)** Исследовать на сходимость несобственные интегралы

**Вар. №1** 1)  $\int_1^{\infty} \frac{\cos^2(3x)}{3x^3 - 4x^2 + 4x} dx$ ; 2)  $\int_2^{+\infty} \frac{3}{x \cdot \ln^3(x)} dx$ ; 3)  $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4x} dx$ .

**Вар. №2** 1)  $\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^4 + 4} dx$ ; 2)  $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x \cdot \sqrt{1 + \ln(x)}} dx$ ; 3)  $\int_1^3 \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-1}} dx$ .

**№2 (5 баллов)** Исследовать числовой ряд на сходимость.

Для знакопеременных рядов исследовать также абсолютную сходимость

**Вариант №1**

1)  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{8}{12} + \frac{11}{24} + \frac{14}{48} + \frac{17}{96} + \dots$ ; 2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^3 + 2n}$ ; 3)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n!}$ .

**Вариант №2**

1)  $\frac{2}{3} - \frac{3}{6} + \frac{4}{12} - \frac{5}{24} + \frac{6}{48} - \frac{7}{96} + \dots$ ; 2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n^3 + 2n}$ ; 3)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{\log_4(n+1)}$ .

**№3 (3 балла)** Найти интервал и область сходимости степенного ряда

**Вариант №1**  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2}{n+1} \cdot (x+4)^n$ ;

**Вариант №2**  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x+5)^n$ ;

**№4 (3 балла)** Записать разложение функции  $f(x)$  в степенной ряд в окрестности точки  $x = x_0$  и найти область сходимости полученного ряда

**Вариант №1** 1)  $f(x) = 2e^{-2x}$ ,  $x_0 = 0$ ; 2)  $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ ,  $x_0 = 1$ ;

**Вариант №2** 1)  $f(x) = 2 \sin(5x)$ ,  $x_0 = 0$ ; 2)  $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ ,  $x_0 = 2$ .

**Контрольная работа 3.2 по теме****«Дифференциальные уравнения и их системы»****выдаётся на 8 неделе, сдача на 18 неделе 3-го семестра****№5 (6 баллов)** Для каждого дифференциального уравнения

- а) Определить его вид;
- б) Найти общее решение (общий интеграл);
- в) При указанных начальных условиях решить задачу Коши

**Вариант №1**

- 1)  $x \cdot y' - 2y = 1, y(1)=1;$
- 2)  $(p^2 + 1) \cdot \sqrt{s} \cdot ds + p \cdot s \cdot dp = 0 ;$
- 3)  $(x - y) \cdot dx + (2y - x) \cdot dy = 0, y=1$  при  $x=1;$

**Вариант №2**

- 1)  $(x - y) \cdot dx + (y + x) \cdot dy = 0, y=1$  при  $x=1;$
- 2)  $2q \cdot (p + 1) \cdot dq + p \cdot \sqrt{q} \cdot dp = 0 , p=1$  при  $q=4;$
- 3)  $x \cdot y' - 4y = x^3$

**№6 (6 баллов)** Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений и выделить частное решение, если указаны начальные условия**Вариант №1**

- 1)  $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0;$
- 2)  $\frac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \frac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, s(0) = 1, s'(0) = 0;$
- 3)  $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

**Вариант №2**

- 1)  $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0;$
- 2)  $\frac{d^3 p}{dt^3} + 3 \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - 18 \cdot \frac{dp}{dt} = 0, p(0) = 1, p'(0) = 0;$
- 3)  $y'' + 8y' + 41y = 0.$

**№7 (8 баллов)** При начальных условиях  $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$  найти решение уравнения  $A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = f(x)$

| Вар. | Нач. условие |        | Коэффициенты ЛОДУ |    |    | Неоднородность $f(x)$                             |
|------|--------------|--------|-------------------|----|----|---------------------------------------------------|
|      | $y_0$        | $y'_0$ | A                 | B  | C  |                                                   |
| 1    | 5            | 4,5    | 2                 | -1 | -1 | $10e^x - 7 \sin(x) + \cos(x) + 2x$                |
| 2    | 0            | 19     | 2                 | 16 | 50 | $90e^{2x} + 64 \sin(x) - 32 \cos(x) - 100x + 118$ |

**№8 (4 балла)** Дана система дифференциальных уравнений.

- 1) Найти методом исключения общее решение системы;
- 2) Записать общее решение системы в векторном виде;
- 3) Найти собственные числа и собственные векторы;
- 4) Изобразить эскиз интегральных кривых исходной системы в окрестности точки  $O(0; 0)$  и исследовать такую точку на устойчивость;
- 5) Из общего решения системы выделить частное решение системы при указанных начальных условиях.

**Вариант №1**  $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}, \quad x=1 \quad y=-6 \quad \text{при} \quad t=0.$

**Вариант №2**  $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2 \cdot x + 4 \cdot y \end{cases}, \quad x=-6 \quad y=-6 \quad \text{при} \quad t=0.$

## 3.2 Вопросы экзамена по 3-му семестру

1. Несобственный интеграл 1 рода, определение и критерии его сходимости.
2. Несобственный интеграл II рода, определение и критерии его сходимости.
3. Определение числового ряда, его частичных сумм и суммы, сходимости и расходимости. Сходимость геометрической прогрессии, ее сумма.
4. Признаки сходимости числового ряда: необходимый, сравнения и эквивалентности, интегральный и сходимость  $\sum \frac{1}{n^p}$ , Даламбера и Коши.
5. Знакопеременный и знакочередующийся ряды. Теорема Лейбница (признак Лейбница) о сходимости знакочередующегося ряда и оценке его суммы.
6. Функциональный ряд, определение его области сходимости. Степенной ряд. Теорема Абеля, интервал и радиус сходимости степенного ряда.
7. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда, вычисление суммы степенного ряда сведением к геометрической прогрессии (или другому ряду).
8. Ряды Тейлора и Маклорена, их коэффициенты. Разложение в степенной ряд  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $e^x$ ,  $\ln(1+x)$  и др.
9. Приближенные вычисления чисел  $e$  и  $\pi$ , вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.
10. Область нескольких переменных, окрестность точки. Открытая и замкнутая области нескольких переменных. Функции нескольких переменных (ФНП): определение, способы задания. Геометрический смысл  $Z=f(x,y)$ , линии уровня.
11. Предел ФНП в точке. Непрерывность ФНП в точке. Основные свойства непрерывных ФНП.
12. Определение частной производной ФНП, правила их вычисления. Геометрический смысл частных производных для  $Z=f(x,y)$ . Уравнение касательной плоскости и нормали.
13. Полный дифференциал ФНП, связь с  $\Delta f$ , инвариантность его формы. Полная производная по переменной  $t$ . Производная неявной функции.
14. Производная по направлению. Градиент функции: определение, правила вычисления, связь с производной по направлению и с линией (поверхностью) уровня.
15. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных ФНП. Дифференциалы высших порядков для ФНП, их коэффициенты для  $f(x, y)$  (треугольник Паскаля и бином Ньютона). Формула Тейлора для ФНП. Приближенные вычисления.
16. Точки экстремума ФНП. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума в общем виде и для  $f(x, y)$ , характер экстремума.

17. Условный экстремум ФНП. Метод множителей Лагранжа и метод подстановки.
18. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой ограниченной области (план).
19. Общие понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ): ДУ, его решение, общее и частное решения, начальные и краевые условия, интегральная кривая, задача Коши. Теорема Коши для ДУ первого порядка.
20. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными, их решения. Сведение текстовой задачи к решению ДУ на примере задачи о распаде радия и о непрерывном растворении соли (или другой задачи).
21. Однородные функции двух переменных. Общий вид и правило интегрирования однородных диф. уравнений. Уравнения, приводящиеся к однородным, их интегрирование.
22. Линейные ДУ первого порядка, методы Бернулли и Лагранжа для их интегрирования.
23. Уравнение Бернулли, его интегрирование непосредственно и сведением к линейному ДУ.
24. Уравнение в полных дифференциалах: общий вид, правило интегрирования и физический смысл (потенциальность плоского векторного поля).
25. Методы Эйлера и изоклин приближенного построения интегральных кривых.
26. Решение ДУ в виде степенного ряда, два способа нахождения его коэффициентов;
27. ДУ второго порядка. Случаи ДУ, допускающих понижение порядка.
28. Линейное ДУ второго порядка: общий вид, свойства решений, структура общего решения.
29. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского. Теорема о связи определителя Вронского с линейной зависимостью решений линейного однородного ДУ. Фундаментальная система решений и общее решение при этом.
30. Линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами: общий вид, метод Эйлера его решения, характеристическое уравнение. Общее решение линейного ДУ при известных корнях характеристического уравнения:
  - а) корни действительные, различные;
  - б) корни кратные;
  - в) корни комплексные, сопряженные.
31. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ при неоднородности специального вида (метод подбора):
  - а)  $P_n(x)$ ; б)  $P_n(x) \cdot e^{ax}$ ; в)  $e^{ax} \cdot (A \cos(bx) + B \sin(bx))$ ; г) Сумма функций.Нахождение коэффициентов предполагаемого решения.

32. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ методом вариации постоянных.
33. ДУ, описывающее механические колебания. Случаи свободных, затухающих, вынужденных колебаний. Случай резонанса.
34. Каноническая и нормальная формы системы ДУ. Решение системы ДУ, общее и частное решения. Начальные условия. Теорема о существовании и единственности решения системы ДУ.
35. Сведение ДУ к системе ДУ в нормальной форме, системы ДУ к одному дифференциальному уравнению (метод исключения).
36. Системы линейных уравнений, свойства решений однородных систем и неоднородных систем ДУ. Определитель Вронского системы ДУ, его свойства. ФСР системы ЛОДУ.
37. Нахождение решений линейной однородной системы методом исключения.
38. Нахождение решений линейной однородной системы с помощью собственных векторов.
39. Нахождение решений линейной неоднородной однородной системы методом вариации постоянных.

### 3.3 ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА ПО 3-му семестру

**НТИ НИЯУ МИФИ**  
**Кафедра общенаучных дисциплин**  
**Экзаменационный билет №1**  
**по курсу «Математика» 3 семестр**

№1 Исследовать сходимость интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{2x^3 - x^3\sqrt{x^2 + 1}}{x^4 + 4x^5} dx;$

№2 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2 \cdot y}{x} = 2x^2;$$

№3 Найти решение системы дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \cdot x + 2 \cdot y \\ y'(t) = 7 \cdot x + 3 \cdot y \end{cases} \quad x = 1, \quad y = -10 \quad \text{при } t = 0 \quad ;$$

№4 Найти первые пять ненулевых членов разложения в степенной ряд для решения задачи Коши

$$4y = -y'' - 48 \cdot \cos(3x) \quad \begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = 4 \end{cases};$$

№5 Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right) \cdot (x+2)^n.$

Составил: \_\_\_\_\_ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: \_\_\_\_\_ Носырев Н.А.

Новоуральск 2024



**ДЛЯ ЗАМЕТОК:**





Фонд оценочных средств (ФОС) по дисциплине

МАТЕМАТИКА 1 – 3 семестры

Учебно – методическое пособие для всех специальностей всех форм обучения.

Новоуральск, изд. НТИ НИЯУ МИФИ. 2024– 28 с.

Макет подготовлен на кафедре ОНД НТИ НИЯУ МИФИ

Подписано в печать \_\_\_\_\_

Формат А5

Гарнитура

Печать плоская. Усл-печ. л. \_\_\_\_ Тираж \_\_\_\_ экз. Заказ \_\_\_\_\_

Отпечатано на ризографе НТИ НИЯУ МИФИ

Издательство Новоуральского государственного технологического института  
НИЯУ МИФИ,

624130, г. Новоуральск, ул. Ленина 85, НТИ НИЯУ МИФИ

Лицензия РФ ПЛР №00751 от 18.01.2000 г.