

Сборник заданий

Контрольной работы по математике

для очно-заочной формы обучения

3 семестр второго курса

2024 г ИТ-23к

Каждый студент выполняет по одному заданию из семи задач, вариант – его номер в списке группы. При решении использовать конспект лекций, литературу из списка, справочник формул.

№1(6 баллов) Для каждого дифференциального уравнения

- а) Определить его вид;
- б) Найти общее решение (общий интеграл);
- в) При указанных начальных условиях решить задачу Коши

Вариант №1

- 1) $x \cdot y' - 2y = 1, y(1)=1;$
- 2) $(p^2 + 1) \cdot \sqrt{s} \cdot ds + p \cdot s \cdot dp = 0 ;$
- 3) $(x - y) \cdot dx + (2y - x) \cdot dy = 0, y=1$ при $x=1;$

Вариант №2

- 1) $(x - y) \cdot dx + (y + x) \cdot dy = 0, y=1$ при $x=1;$
- 2) $2q \cdot (p + 1) \cdot dq + p \cdot \sqrt{q} \cdot dp = 0, p=1$ при $q=4;$
- 3) $x \cdot y' - 4y = x^3$

Вариант №3

- 1) $y' - \frac{2y}{x} = x^2, y(1)=1;$
- 2) $\cos(t) \cdot \sqrt{s} \cdot ds + \sin(t) \cdot s \cdot dt = 0$
- 3) $y' = \frac{y}{x} - 2 \sin^2\left(\frac{y}{x}\right), y=1$ при $x=1;$

Вариант №4

- 1) $x \cdot y' - 2y = x^3, y(1)=1;$
- 2) $(p^2 + p) \cdot s \cdot ds + p \cdot s^3 \cdot dp = 0, p=1$ при $s=4;$
- 3) $(x^2 + 2y^2) \cdot dx + 4x \cdot y \cdot dy = 0;$

Вариант №5

- 1) $y' - \frac{y}{x^2 - 1} = x - 1, y(0)=1;$
- 2) $\sqrt[3]{\cos(h)} \cdot e^t \cdot dh - \frac{t}{\sin(h)} \cdot dt = 0$

$$3) y' = 4 \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}, \quad y=1 \text{ при } x=1;$$

Вариант №6

$$1) (t-y) \cdot dt - (y+t) \cdot dy = 0, \quad t=1 \text{ при } y=4;$$

$$2) x \cdot y' + 3y = x^5, \quad y(1)=1;$$

$$3) 2q \cdot (p+1) \cdot dq + p \cdot \sqrt{q} \cdot dp = 0$$

Вариант №7

$$1) y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad y=1 \text{ при } x=1;$$

$$2) \frac{u}{p} \cdot du + p^2 \cdot \sin^2(u^2) \cdot dp = 0, \quad p=1 \text{ при } u=\frac{\pi}{4};$$

$$3) y' + y = e^x.$$

Вариант №8

$$1) (p^2 + 1) \cdot \sin\left(\frac{1}{s}\right) \cdot ds + p \cdot s^2 \cdot dp = 0;$$

$$2) x \cdot y' + 2y = 1, \quad y(0)=1;$$

$$3) (x-3y) \cdot dx + (2y-3x) \cdot dy = 0, \quad y=1 \text{ при } x=2.$$

Вариант №9

$$1) y' - \frac{4y}{x} = x, \quad y(1)=1;$$

$$2) \cos^3(t) \cdot \sqrt{\ln(s)+2} \cdot ds + \sin(t) \cdot s \cdot dt = 0$$

$$3) y' - \frac{y}{x} = -\sin^2\left(\frac{y}{x}\right), \quad y=0 \text{ при } x=2.$$

Вариант №10

$$1) y' + \frac{2y}{x} = x^6;$$

$$2) \frac{dy}{dx} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y}{x}, \quad y=1 \text{ при } x=1;$$

$$3) \sin(t) \cdot (p^2 + 1) \cdot dt - \cos^2(t) \cdot p \cdot dp = 0, \quad p=1 \text{ при } t=2.$$

Вариант №11

$$1) (m^2 + 4) \cdot s \cdot ds - m \cdot (s^2 - 4) \cdot dm = 0;$$

$$2) \frac{dy}{dx} = y + x + 1, \quad y(0)=1;$$

$$3) (x^2 + 2y^2) \cdot dy + 2x \cdot y \cdot dx = 0, \quad y=1 \text{ при } x=1.$$

Вариант №12

$$1) \sqrt[3]{\cos(h)} \cdot e^t \cdot dh - \frac{t}{\sin(h)} \cdot dt = 0, \quad h=1 \text{ при } t=2;$$

$$2) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \cdot (\ln(y) - \ln(x));$$

$$3) y' - \frac{y}{1-x^2} = 3, \quad y(0)=1.$$

- Вариант №13
- 1) $(t - 2s) \cdot dt - (s + 2t) \cdot ds = 0$;
 - 2) $2x \cdot \frac{dy}{dx} - 4y = x^6$, $y(1)=1$;
 - 3) $2q \cdot (p + 1) \cdot dp - 2p \cdot \sqrt{q} \cdot dq = 0$, $q=1$ при $p=1$.
- Вариант №14
- 1) $(p^2 + 1) \cdot \sqrt{s} \cdot ds + p \cdot s \cdot dp = 0$;
 - 2) $(x - y) \cdot dx + (2y - x) \cdot dy = 0$, $y=1$ при $x=1$;
 - 3) $x \cdot y' - 2y = 1$, $y(1)=1$.
- Вариант №15
- 1) $\cos(t) \cdot \sqrt{s} \cdot ds + \sin(t) \cdot s \cdot dt = 0$, $s=1$ при $t=\frac{\pi}{6}$;
 - 2) $y' - \frac{2y}{x} = x^2$, $y(1)=2$;
 - 3) $y' = \frac{y}{x} - 2 \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Вариант №16
- 1) $x \cdot y' - 4y = x^3$, $y(1)=-1$;
 - 2) $(x - y) \cdot dx + (y + x) \cdot dy = 0$, $y=1$ при $x=2$;
 - 3) $2q \cdot (p + 1) \cdot dq + p \cdot \sqrt{q} \cdot dp = 0$.
- Вариант №17
- 1) $y' + \frac{2y}{x} = x$;
 - 2) $\cos(t) \cdot \sqrt{p} \cdot dt + \sin^2(t) \cdot p^2 \cdot dp = 0$, $p=1$ при $t=\frac{\pi}{6}$;
 - 3) $y' = \frac{y}{x} + 2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$.
- Вариант №18
- 1) $(x^2 + 2y^2) \cdot dx + 4x \cdot y \cdot dy = 0$;
 - 2) $(p^2 + p) \cdot s \cdot ds + p \cdot s^3 \cdot dp = 0$, $p=1$ при $s=1$;
 - 3) $x \cdot y' - 2y = x^3$, $y(2)=1$.
- Вариант №19
- 1) $\sqrt[3]{\cos(h)} \cdot e^t \cdot dh - \frac{t}{\sin(h)} \cdot dt = 0$;
 - 2) $y' = 4 \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$, $y(1)=1$;
 - 3) $y' - \frac{y}{x^2 - 1} = x - 1$, $y=1$ при $x=0$.
- Вариант №20
- 1) $2q \cdot (p + 1) \cdot dq + p \cdot \sqrt{q} \cdot dp = 0$;
 - 2) $(t - y) \cdot dt - (y + t) \cdot dy = 0$, $y=1$ при $t=2$;
 - 3) $x \cdot y' + 3y = x^5$, $y(2)=1$.

№3 (6 баллов) Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений и выделить частное решение, если указаны начальные условия

Вариант №1

1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0;$

2) $\frac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \frac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, \quad s(0) = 1, \quad s'(0) = 0;$

3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №2

1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0;$

2) $\frac{d^3 p}{dt^3} + 3 \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - 18 \cdot \frac{dp}{dt} = 0, \quad p(0) = 1, \quad p'(0) = 0;$

3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

Вариант №3

1) $y''' + 6y'' + 25y' = 0 ;$

2) $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0;$

3) $\frac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \frac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0 .$

Вариант №4

1) $\frac{d^3 L}{dt^3} + 10 \cdot \frac{d^2 L}{dt^2} + 29 \cdot \frac{dL}{dt} = 0,$

2) $y'' + 8y' + 15y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0;$

3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Вариант №5

1) $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0;$

2) $\frac{d^2 t}{dp^2} + 10 \cdot \frac{dt}{dp} + 25 \cdot t(p) = 0, \quad t(0) = 3, \quad t'(0) = 0;$

3) $y''' + 6y'' + 13y' = 0.$

Вариант №6

1) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0;$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0;$

3) $\frac{d^3 T}{dt^3} + 6 \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} + 41 \cdot \frac{dT}{dt} = 0, \quad T(0) = 1, \quad T'(0) = 0.$

Вариант №7

- 1) $\frac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \frac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0$;
- 2) $y'' + 2y' - 15y = 0$;
- 3) $y''' + 6y'' + 25y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$

Вариант №8

- 1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0$;
- 2) $\frac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \frac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, \quad s(0) = 1, \quad s'(0) = 0$;
- 3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №9

- 1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0$;
- 2) $\frac{d^3 p}{dt^3} + 3 \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - 18 \cdot \frac{dp}{dt} = 0, \quad p(0) = 1, \quad p'(0) = 0$;
- 3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

Вариант №10

- 1) $y''' + 6y'' + 25y' = 0$;
- 2) $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$;
- 3) $\frac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \frac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0$.

Вариант №11

- 1) $\frac{d^3 L}{dt^3} + 10 \cdot \frac{d^2 L}{dt^2} + 29 \cdot \frac{dL}{dt} = 0,$
- 2) $y'' + 8y' + 15y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$;
- 3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Вариант №12

- 1) $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0$;
- 2) $\frac{d^2 t}{dp^2} + 10 \cdot \frac{dt}{dp} + 25 \cdot t(p) = 0, \quad t(0) = 3, \quad t'(0) = 0$;
- 3) $y''' + 6y'' + 13y' = 0.$

Вариант №13

- 1) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$;
- 2) $y'' + 6y' + 9y = 0$;
- 3) $\frac{d^3 T}{dt^3} + 6 \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} + 41 \cdot \frac{dT}{dt} = 0, \quad T(0) = 1, \quad T'(0) = T''(0) = 0.$

Вариант №14

- 1) $\frac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \frac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0$;
- 2) $y'' + 2y' - 15y = 0$;
- 3) $y''' + 6y'' + 25y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$

Вариант №15

- 1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0$;
- 2) $\frac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \frac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, \quad s(0) = 1, \quad s'(0) = 0$;
- 3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №16

- 1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0$;
- 2) $\frac{d^3 p}{dt^3} + 3 \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - 18 \cdot \frac{dp}{dt} = 0, \quad p(0) = 1, \quad p'(0) = 0$;
- 3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

Вариант №17

- 1) $y''' + 6y'' + 25y' = 0$;
- 2) $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$;
- 3) $\frac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \frac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0$.

Вариант №18

- 1) $\frac{d^3 L}{dt^3} + 10 \cdot \frac{d^2 L}{dt^2} + 29 \cdot \frac{dL}{dt} = 0,$
- 2) $y'' + 8y' + 15y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$;
- 3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Вариант №19

- 1) $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0$;
- 2) $\frac{d^2 t}{dp^2} + 10 \cdot \frac{dt}{dp} + 25 \cdot t(p) = 0, \quad t(0) = 3, \quad t'(0) = 0$;
- 3) $y''' + 6y'' + 13y' = 0.$

Вариант №20

- 1) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$;
- 2) $y'' + 6y' + 9y = 0$;
- 3) $\frac{d^3 T}{dt^3} + 6 \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} + 41 \cdot \frac{dT}{dt} = 0, \quad T(0) = 1, \quad T'(0) = 0.$

№3(8 баллов) При начальных условиях $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$ найти решение уравнения $A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = f(x)$ (где $\exp(a \cdot x) = e^{a \cdot x}$)

Вар.	Нач. условие		Коэффициенты ЛОДУ			Неоднородность $f(x)$
	y_0	y'_0	A	B	C	
1	5	4.5	2	-1	-1	$10 \cdot \exp(2 \cdot x) - 7 \cdot \sin(x) + \cos(x) + 2 \cdot x$
2	0	19	2	16	50	$90 \cdot \exp(2 \cdot x) - 32 \cdot \cos(x) + 64 \cdot \sin(x) + 118 - 100 \cdot x$
3	3	-6.5	2	1	-15	$-10 \cdot \exp(2 \cdot x) + 19 \cdot \cos(x) - 33 \cdot \sin(x) - 62 + 30 \cdot x$
4	4	15	2	-16	34	$10 \cdot \exp(2 \cdot x) - 48 \cdot \cos(x) + 16 \cdot \sin(x) + 66 - 68 \cdot x$
5	7	-6.5	2	3	-27	$-26 \cdot \exp(2 \cdot x) + 35 \cdot \cos(x) - 55 \cdot \sin(x) - 60 + 54 \cdot x$
6	2	12	2	20	68	$116 \cdot \exp(2 \cdot x) - 46 \cdot \cos(x) + 86 \cdot \sin(x) + 164 - 136 \cdot x$
7	5	4.5	2	5	3	$42 \cdot \exp(2 \cdot x) + 9 \cdot \cos(x) + 7 \cdot \sin(x) + 2 - 6 \cdot x$
8	-4	-7	2	-8	10	$2 \cdot \exp(2 \cdot x) - 16 \cdot \cos(x) + 26 - 20 \cdot x$
9	-1	-28.5	2	-1	-55	$-98 \cdot \exp(2 \cdot x) - 115 \cdot \sin(x) - 108 + 55 \cdot \cos(x) + 110 \cdot x$
10	4	1	2	24	90	$146 \cdot \exp(2 \cdot x) - 64 \cdot \cos(x) + 112 \cdot \sin(x) + 222 - 180 \cdot x$
11	7	-0.5	2	9	-11	$30 \cdot \exp(2 \cdot x) + 31 \cdot \cos(x) - 17 \cdot \sin(x) - 62 + 22 \cdot x$
12	-2	-6	2	-12	20	$4 \cdot \exp(2 \cdot x) - 30 \cdot \cos(x) + 6 \cdot \sin(x) + 44 - 40 \cdot x$
13	1	-3.5	2	3	-9	$10 \cdot \exp(2 \cdot x) + 17 \cdot \cos(x) - 19 \cdot \sin(x) - 24 + 18 \cdot x$
14	6	-5	2	16	50	$90 \cdot \exp(2 \cdot x) - 32 \cdot \cos(x) + 64 \cdot \sin(x) + 118 - 100 \cdot x$
15	9	5.5	2	-5	-3	$-10 \cdot \exp(2 \cdot x) - 5 \cdot \cos(x) - 15 \cdot \sin(x) - 2 + 6 \cdot x$
16	0	-1	2	-16	34	$10 \cdot \exp(2 \cdot x) - 48 \cdot \cos(x) + 16 \cdot \sin(x) + 66 - 68 \cdot x$
17	3	5.5	2	7	5	$54 \cdot \exp(2 \cdot x) + 11 \cdot \cos(x) + 13 \cdot \sin(x) - 4 - 10 \cdot x$
18	-2	32	2	20	68	$116 \cdot \exp(2 \cdot x) - 46 \cdot \cos(x) + 86 \cdot \sin(x) + 164 - 136 \cdot x$
19	1	-3.5	2	9	-5	$42 \cdot \exp(2 \cdot x) + 25 \cdot \cos(x) - 5 \cdot \sin(x) - 38 + 10 \cdot x$
20	2	5	2	-8	10	$2 \cdot \exp(2 \cdot x) - 16 \cdot \cos(x) + 26 - 20 \cdot x$

№4(4 балла) Дана система дифференциальных уравнений.

- 1) Найти методом исключения общее решение системы;
- 2) Записать общее решение системы в векторном виде;
- 3) Найти собственные числа и собственные векторы;
- 4) Изобразить эскиз интегральных кривых исходной системы в окрестности точки $O(0; 0)$ и исследовать такую точку покоя на устойчивость;
- 5) Из общего решения системы выделить частное решение системы при указанных начальных условиях.

Вариант №1 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}$, $x=1 \ y=-6$ при $t=0$.

Вариант №2 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2 \cdot x + 4 \cdot y \end{cases}$, $x=-6 \ y=-6$ при $t=0$.

Вариант №3 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}$, $x=1 \ y=-5$ при $t=0$.

Вариант №4 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12 \cdot x + 8 \cdot y \end{cases}$, $x=2 \ y=6$ при $t=0$.

Вариант №5 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -98 \cdot x - 12 \cdot y \end{cases}$, $x=-2 \ y=14$ при $t=0$.

Вариант №6 $\begin{cases} x'(t) = 11 \cdot x + y \\ y'(t) = -136 \cdot x - 14 \cdot y \end{cases}$, $x=-2 \ y=16$ при $t=0$.

Вариант №7 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}$, $x=1 \ y=-5$ при $t=0$.

Вариант №8 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}$, $x=1 \ y=-6$ при $t=0$.

Вариант №9 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2 \cdot x + 4 \cdot y \end{cases}$, $x=-6 \ y=-6$ при $t=0$.

Вариант №10 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}$, $x=1 \ y=-5$ при $t=0$.

Вариант №11 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12 \cdot x + 8 \cdot y \end{cases}$, $x=2 \ y=6$ при $t=0$.

Вариант №12 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -98 \cdot x - 12 \cdot y \end{cases}$, $x=-2 \ y=14$ при $t=0$.

$$\text{Вариант №13} \quad \begin{cases} x'(t) = 11 \cdot x + y \\ y'(t) = -136 \cdot x - 14 \cdot y \end{cases}, \quad x = -2 \quad y = 16 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

$$\text{Вариант №14} \quad \begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}, \quad x = 1 \quad y = -5 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

$$\text{Вариант №15} \quad \begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}, \quad x = 1 \quad y = -6 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

$$\text{Вариант №16} \quad \begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2 \cdot x + 4 \cdot y \end{cases}, \quad x = -6 \quad y = -6 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

$$\text{Вариант №17} \quad \begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}, \quad x = 1 \quad y = -5 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

$$\text{Вариант №18} \quad \begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12 \cdot x + 8 \cdot y \end{cases}, \quad x = 2 \quad y = 6 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

$$\text{Вариант №19} \quad \begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -98 \cdot x - 12 \cdot y \end{cases}, \quad x = -2 \quad y = 14 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

$$\text{Вариант №20} \quad \begin{cases} x'(t) = 11 \cdot x + y \\ y'(t) = -136 \cdot x - 14 \cdot y \end{cases}, \quad x = -2 \quad y = 16 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

№5(5 баллов) Исследовать числовой ряд на сходимость.

Для знакопеременных рядов исследовать также абсолютную сходимость

Вариант №1

$$1) \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{8}{12} + \frac{11}{24} + \frac{14}{48} + \frac{17}{96} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^3 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n!}.$$

Вариант №2

$$1) \frac{2}{3} - \frac{3}{6} + \frac{4}{12} - \frac{5}{24} + \frac{6}{48} - \frac{7}{96} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n^3 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{\log_4(n+1)}.$$

Вариант №3

$$1) \frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{24} + \frac{11}{120} + \frac{14}{720} + \frac{17}{5040} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n)}{n^3 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^2(3n).$$

Вариант №4

$$1) \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + \frac{4}{9} - \frac{5}{11} + \frac{6}{13} - \frac{7}{15} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n^3 + 2n} \right)^n; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Вариант №5

$$1) \frac{2}{2} + \frac{4}{6} + \frac{6}{18} + \frac{8}{54} + \frac{10}{162} + \frac{12}{486} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^4 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{4n+1}.$$

Вариант №6

$$1) \frac{2}{1} - \frac{4}{3} + \frac{6}{9} - \frac{8}{27} + \frac{10}{81} - \frac{12}{243} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(2n)}{n^2 + 3n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{(n+1)^4}.$$

Вариант №7

$$1) \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{8}{12} + \frac{11}{24} + \frac{14}{48} + \frac{17}{96} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^2 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^2\left(\frac{3}{n}\right).$$

Вариант №8

$$1) \frac{4}{5} - \frac{5}{9} + \frac{6}{13} - \frac{7}{17} + \frac{8}{21} - \frac{9}{25} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2} \right)^n; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{2}{n+1}\right).$$

Вариант №9

$$1) \frac{2}{2} + \frac{5}{4} + \frac{8}{8} + \frac{11}{16} + \frac{14}{32} + \frac{17}{64} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - \sqrt[3]{n+1}}{n^3 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^3 + 1}.$$

Вариант №10

$$1) \frac{2}{1} - \frac{4}{1} + \frac{6}{2} - \frac{8}{6} + \frac{10}{24} - \frac{12}{120} + \frac{14}{720} - \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 + 3n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{(n+1)^4}.$$

Вариант №11

$$1) \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{8}{12} + \frac{11}{24} + \frac{14}{48} + \frac{17}{96} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^3 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n!}.$$

Вариант №12

$$1) \frac{2}{3} - \frac{3}{6} + \frac{4}{12} - \frac{5}{24} + \frac{6}{48} - \frac{7}{96} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n^3 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{\log_4(n+1)}.$$

Вариант №13

$$1) \frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{24} + \frac{11}{120} + \frac{14}{720} + \frac{17}{5040} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n)}{n^3 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^2(3n).$$

Вариант №14

$$1) \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + \frac{4}{9} - \frac{5}{11} + \frac{6}{13} - \frac{7}{15} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n^3 + 2n} \right)^n; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Вариант №15

$$1) \frac{2}{2} + \frac{4}{6} + \frac{6}{18} + \frac{8}{54} + \frac{10}{162} + \frac{12}{486} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^4 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{4n+1}.$$

Вариант №16

$$1) \frac{2}{1} - \frac{4}{3} + \frac{6}{9} - \frac{8}{27} + \frac{10}{81} - \frac{12}{243} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(2n)}{n^2 + 3n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{(n+1)^4}.$$

Вариант №17

$$1) \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{8}{12} + \frac{11}{24} + \frac{14}{48} + \frac{17}{96} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^2 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^2\left(\frac{3}{n}\right).$$

Вариант №18

$$1) \frac{4}{3} - \frac{5}{7} + \frac{6}{11} - \frac{7}{15} + \frac{8}{19} - \frac{9}{23} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2} \right)^n; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{2}{n+1}\right).$$

Вариант №19

$$1) \frac{2}{2} + \frac{5}{4} + \frac{8}{8} + \frac{11}{16} + \frac{14}{32} + \frac{17}{64} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - \sqrt[3]{n+1}}{n^3 + 2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^3 + 1}.$$

Вариант №20

$$1) \frac{2}{1} - \frac{4}{1} + \frac{6}{2} - \frac{8}{6} + \frac{10}{24} - \frac{12}{120} + \frac{14}{720} - \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 + 3n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{(n+1)^4}.$$

№6(3 балла) Найти интервал и область сходимости степенного ряда

Вариант №1 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2}{n+1} \cdot (x+4)^n ;$

Вариант №2 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x+5)^n ;$

Вариант №3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \cdot (x-1)^n ;$

Вариант №4 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x+5)^n ;$

Вариант №5 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+2} \cdot (x-3)^n ;$

Вариант №6 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot (x+2)^n ;$

Вариант №7 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2n} \cdot (x-1)^n ;$

Вариант №8 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot (x+2)^n ;$

Вариант №9 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+2} \cdot (x-6)^n ;$

Вариант №10 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n} \cdot (x+6)^n ;$

Вариант №11 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2}{n+1} \cdot (x+4)^n ;$

Вариант №12 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x+5)^n ;$

Вариант №13 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \cdot (x-1)^n ;$

Вариант №14 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+2} \cdot (x+3)^n ;$

Вариант №15 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n+2} \cdot (x-3)^n ;$

Вариант №16 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot (x+2)^n ;$

Вариант №17 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2n} \cdot (x-1)^n ;$

Вариант №18 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot (x+2)^n ;$

Вариант №19 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+2} \cdot (x-6)^n ;$

Вариант №20 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n} \cdot (x+6)^n ;$

№7 (3 балла) Записать разложение функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки $x = x_0$ и найти интервал сходимости полученного ряда

Вариант №1 1) $f(x) = 2e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №2 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №3 1) $f(x) = 2\cos(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$, $x_0 = 1$.

Вариант №4 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x}{x+5}$, $x_0 = 2$.

Вариант №5 1) $f(x) = x \cdot e^{5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №6 1) $f(x) = (x-2) \cdot \sin(x-2)$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №7 1) $f(x) = 2\ln(x^2 + 1)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$, $x_0 = 2$.

Вариант №8 1) $f(x) = 2\sin(3x-3)$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$, $x_0 = 0$.

Вариант №9 1) $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №10 1) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x+6}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №11 1) $f(x) = 2e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №12 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №13 1) $f(x) = 2\cos(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$, $x_0 = 1$.

Вариант №14 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x}{x+5}$, $x_0 = 2$.

Вариант №15 1) $f(x) = x \cdot e^{5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №16 1) $f(x) = (x-2) \cdot \sin(x-2)$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №17 1) $f(x) = 2\ln(x^2 + 1)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$, $x_0 = 2$.

Вариант №18 1) $f(x) = 2\sin(3x-3)$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$, $x_0 = 0$.

Вариант №19 1) $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №20 1) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x+6}{x-3}$, $x_0 = 1$.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Новоуральский технологический институт

Кафедра высшей математики

Направление подготовки—15.03.05 - "Конструкторско-технологическое
обеспечение машиностроительных производств»

Профиль – «Технология машиностроения» (КМ-24з)

Квалификация (степень) выпускника – академический бакалавр

Форма обучения – Заочная

Дисциплина – **МАТЕМАТИКА, 3 СЕМЕСТР**

Экзаменационный билет №1

№1 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2 \cdot y}{x} = 2x^2;$$

№2 Найти частное решение дифференциального уравнения

$$4y = -y'' - 48 \cdot \cos(3x)$$

$$\begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = 4 \end{cases};$$

№3 Найти решение системы дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \cdot x + 2 \cdot y \\ y'(t) = 7 \cdot x + 3 \cdot y \end{cases} \quad x = 1, \quad y = -10 \quad \text{при } t = 0 \quad ;$$

№4 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{n^3 + 1}$$

№5 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot (x+2)^n$.

Составил: _____ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: _____ Носырев Н.А.

Новоуральск

4 Справочник

- **Теорема Коши:** Если дифференциальное уравнение (ДУ) имеет вид $y^{(n)} = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)})$, где F непрерывная функция и в некоторой области существуют и конечны производные $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial(y')}, \frac{\partial F}{\partial(y'')}, \dots, \frac{\partial F}{\partial(y^{(n-1)})}$,

ТО для всякого начального условия из такой области найдётся решение ДУ и такое решение единственно;

- ДУ с разделяющимися переменными, если $f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0$, для него общий интеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int \frac{-g_2(y)}{g_1(y)} dy, \text{ частный интеграл } \int_{x_0}^x \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int_{y_0}^y \frac{-g_2(y)}{g_1(y)} dy;$$

- Функция однородная измерения k , если $f(t \cdot x; t \cdot y) = t^k \cdot f(x; y)$. При однородности нулевого измерения $f(x; y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$;

- Однородное ДУ имеет вид $f_1(x; y) \cdot dx + f_2(x; y) \cdot dy = 0$, где $f_1(x; y)$ и $f_2(x; y)$ однородные одинакового измерения. Его можно представить в виде $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Выполнив замену $z(x) = \frac{y}{x}$, $y = z \cdot x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot x + z$, получим

уравнение с разделяющимися переменными, в его общем решении или в общем интеграле выполняется обратная замена;

- **Линейное ДУ** $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$. Метод Бернулли: ищем решение в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ и требуем выполнения

$$\frac{dv}{dx} - p(x) \cdot v = 0 \quad \text{т.е.} \quad v(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}, \text{ тогда } u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx;$$

- Уравнение $a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)$ при $f(x) \equiv 0$ является Линейным Однородным ДУ (ЛОДУ), в противном случае ЛНДУ;

- *Определитель Вронского* для функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ находится

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

- Для прешений ЛОДУ выполнено:

1) Они линейно независимы $\Leftrightarrow W(x) \neq 0$;

2) Они линейно зависимы $\Leftrightarrow W(x) = 0$;

- Если дано ЛОДУ $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0$, $a_k = \text{Const}$, то характеристическое уравнение $a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda^2 + a_n \cdot \lambda = 0$

.

- Если $a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$, то $a_0 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_2 = 0$,
 А) $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow y_{\text{opo}} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$;
 Б) $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2) \Rightarrow y_{\text{opo}} = e^{\lambda_1 \cdot x} (c_1 + c_2 \cdot x)$;
 В) $\lambda_{1,2} = a \pm b \cdot i \Rightarrow y_{\text{opo}} = e^{a \cdot x} \cdot (c_1 \cdot \cos(b \cdot x) + c_2 \cdot \sin(b \cdot x)) = c \cdot e^{a \cdot x} \sin(b \cdot x + \varphi)$,
 $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\text{tg}(\varphi) = \frac{c_1}{c_2}$;

- Если дано ЛНДУ $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x)$, $a_k = \text{Const}$ то решение ищем в зависимости от корней характ-гоура-я

Вид неоднородности	Вид решения $y_{\text{чрн}}$
$P_m(x)$	$x^{t_1} \cdot Q_m(x)$ t_1 – кратность корня $\lambda = 0$
$P_m(x) \cdot e^{a \cdot x}$	$x^{t_2} \cdot P_m(x) \cdot e^{a \cdot x}$ t_2 – кратность корня $\lambda = a$
$A_1 \cdot \cos(b \cdot x) + A_2 \cdot \sin(b \cdot x)$	$x^{t_3} \cdot (B_1 \cdot \cos(b \cdot x) + B_2 \cdot \sin(b \cdot x))$ t_3 – кратность корня $\lambda = 0 + b \cdot i$
$e^{a \cdot x} (A_1 \cdot \cos(b \cdot x) + A_2 \cdot \sin(b \cdot x))$	$x^{t_4} \cdot e^{a \cdot x} (B_1 \cdot \cos(b \cdot x) + B_2 \cdot \sin(b \cdot x))$ t_4 – кратность корня $\lambda = a + b \cdot i$

В каноническом виде она записывается $\begin{cases} x'' = -2x + 3y' - \sin(t) \\ y''' = -2x' - 2y'' + 2t \end{cases}$. К

нормальному виду перейдём с увеличением числа искомых функций

$$\begin{cases} x'' = -2x + 3y' - \sin(t) \\ y''' = -2x' - 2y'' + 2t \\ x'(t) = y_3, \quad x(t) = y_1, \quad y(t) = y_2, \\ y'(t) = y_4 \\ (y'(t)) = y_5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_3' = -2y_1 + 3y_4 - \sin(t) \\ y_5' = -2y_3 - 2y_4 + 2t \\ y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_4' = y_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -2y_1 + 3y_4 - \sin(t), \\ y_4' = y_5 \\ y_5' = -2y_3 - 2y_4 + 2t \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(t) \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix};$$

• Решение системы ДУ методом исключения $\begin{cases} x'(t) = 6x + 3y \\ y'(t) = -3x - 4y \end{cases}$

1) $x'' = 6x' + 3y'$; 2) $x'' = 6x' + 3 \cdot (-3x - 4y)$, $x'' = 6x' - 9x - 12y$;

2) $y = \frac{x' - 6x}{3} \Rightarrow x'' = 6x' - 9x - 12 \cdot \frac{x' - 6x}{3}$, $x'' = 2x' + 15x$;

3) $x'' - 2x' - 15x = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$,

общее решение $x(t) = c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot e^{5t}$;

4) $y = \frac{x' - 6x}{3} = \frac{1}{3}((-3c_1 \cdot e^{-3t} + 5c_2 \cdot e^{5t}) - 6(c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot e^{5t}))$,

$y(t) = -3c_1 \cdot e^{-3t} - \frac{1}{3}c_2 \cdot e^{5t}$;

2) Общее решение системы $\begin{cases} x(t) = c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot e^{5t} \\ y(t) = -3c_1 \cdot e^{-3t} - \frac{1}{3}c_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$

или $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$ т.е. собственные числа $\lambda_1 = -3$

и $\lambda_2 = 5$, их собственные векторы $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ и

коллинеарные им векторы;

- Виды интегральных кривых (траекторий) и точки покоя для линейной однородной системы 2-го порядка с постоянными коэффициентами (в зависимости от собственных чисел)

1) λ_1 и λ_2 действительные числа одного знака. Получаем искривленные параболы с общей вершиной, их ось задаёт один из собственных векторов (с наибольшим $|\lambda|$). Точка покоя — *узел*.

1.1) При $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ точки удаляются от вершины с возрастанием параметра t (времени), узел неустойчивый;

1.2) При $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ точки приближаются к вершине с возрастанием времени, узел устойчивый;

2) λ_1 и λ_2 действительные числа разных знаков, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Получаем искривленные гиперболы с общим центром, для которых собственные векторы задают асимптоты. Их точки удаляются от центра и с возрастанием параметра t (времени) приближаются к оси, заданной вектором $\vec{h}_1$ (с положительным λ). Точка покоя — *седло*;

3) $\lambda_{1,2} = 0 \pm b \cdot i$ чисто мнимые. Получаем множество искривленных эллипсов с общим центром в начале координат и осями по собственным векторам. Точка покоя — *центр*;

4) $\lambda_{1,2} = a \pm b \cdot i$ комплексно-сопряженные. Получаем множество спиралей с бесконечным числом витков. Точка покоя — *фокус*.

4.1) Если $a > 0$, то при вращении вокруг центра точки удаляются от него с возрастанием времени, фокус неустойчивый;

4.2) Если $a < 0$, то при вращении вокруг центра точки приближаются к нему с возрастанием времени, фокус устойчивый;

5) При $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ получаем множество прямых, параллельных между собой и собственному вектору $\vec{h}_2$.

5.1) При $\lambda_2 > 0$ с возрастанием времени точки удаляются в обоих направлениях от прямой, заданной вектором $\vec{h}_1$;

5.2) При $\lambda_2 < 0$ с возрастанием времени точки приближаются в обоих направлениях к прямой, заданной вектором $\vec{h}_1$;

- Числовой ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$,

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – частичная сумма ряда;

- Если $a_n = f(n)$ – общий член ряда, то записывают $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum a_n$;

- Ряд *сходится*, если существует конечное число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$,

тогда S – сумма ряда, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

- *Геометрическая прогрессия* со знаменателем q

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_1 \cdot q^n = b_1 + (b_1 \cdot q) + (b_1 \cdot q^2) + \dots + (b_1 \cdot q^n) + \dots,$$

она сходится только при $|q| < 1$,

её частичная сумма $S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ даёт $S = \frac{b_1}{1 - q}$;

- *Необходимое* условие сходимости $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Из $|a_n| \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ следует расходимость ряда;

- Для знакоположительных рядов ($a_n > 0$) выполнено

3) *Признак Даламбера*: если существует $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$,

то $\begin{cases} \text{при } p < 1 \text{ ряд сходится} \\ \text{при } p > 1 \text{ ряд расходится} \\ \text{при } p = 1 \text{ неопределённость} \end{cases}$;

4) *Признак Коши* (радикальный): если существует $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right)$,

то $\begin{cases} \text{при } q < 1 \text{ ряд сходится} \\ \text{при } q > 1 \text{ ряд расходится} \\ \text{при } q = 1 \text{ неопределённость} \end{cases}$;

Напоминание: $\sqrt[n]{const} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$;

5) *Интегральный* признак: Если найдётся непрерывная функция $f(x)$, что выполнено $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, то числовой ряд $\sum a_n$ и несобственный интеграл $\int_M^{+\infty} f(x) dx$ одновременно сходятся либо одновременно расходятся;

6) *Признак эквивалентности*: Эквивалентные знакоположительные ряды одновременно сходятся либо одновременно расходятся.

Если $a_n \sim \frac{1}{n^k}$, то при $k > 1$ ряд сходится, при $k \leq 1$ ряд расходится;

- Знакопеременный ряд сходится *абсолютно*, если ряд $\sum a_n$ сходится и сходится ряд $\sum |a_n|$. Если $\sum a_n$ сходится, но ряд $\sum |a_n|$ расходится, то ряд сходится *условно* и можно подобрать перестановку и (или) группировку его элементов, при которой сумма ряда станет заданным произвольно числом;

- Теорема Лейбница: Если $\sum a_n$ знакочередующийся,

То А) При выполнении $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ряд сходится;

Б) Для сходящегося ряда выполнено $|S - S_n| < |a_{n+1}|$;

В) Знак разности $(S - S_n)$ совпадает со знаком числа a_{n+1} ;

- Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n$ является *степенным* с центром сходимости $x = x_0$. Внутри интервала сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$ он сходится и вне такого интервала расходится.

- Радиус сходимости степенного ряда

$$\text{а) } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} \right) ; \quad \text{б) } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{b_n}} \right) ;$$

- Ряд Тейлора $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n$, где $b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;
- Основные разложения Маклорена в степенной ряд ($x_0 = 0$):
 - 1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$;
 - 2) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$;
 - 3) $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{2n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$;
 - 4) $\ln(1+x) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$;
 - 5) $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} \cdot x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots$

5 Рекомендуемая литература

5.1 Основная литература:

1. **517(075)Ш 63**

Шипачев, В. С. Высшая математика : учеб. пособие для бакалавров / В. С. Шипачев. - 8-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, **2012**. - 447 с. - (Бакалавр, Базовый курс). - Рек. М-вом образования и науки РФ. - ISBN 978-5-9916-2031-4: 316-91.

Кол-во экземпляров: всего - **10**

2. **517(075)Б 74**

Богомолов Н. В. Математика : учеб. для бакалавров / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, **2013**. - 396 с. - (Бакалавр, Базовый курс). - Допущено М-вом образования и науки РФ. - ISBN 978-5-9916-2568-5 : 336-55.

Кол-во экземпляров: всего - **15**

3. **Фролов С.В.** Высшая математика [*Электронный ресурс*]: учеб. пособие/ Фролов С.В., Багаутдинова А.Ш.— [*Электрон. текстовые данные*].— СПб.: ГИОРД, **2012**.— 616 с.— Режим доступа: ЭБС «IPRbooks», по паролю

4. **Туганбаев А. А.** Основы высшей математики : учеб. пособие для ВПО/А. А. Туганбаев. - 1-е изд. [*Электронный ресурс*] — СПб. : Лань, **2011**. — 491 с. - Режим доступа «ЭБС ЛАНЬ»

5.2 Дополнительная литература:

5. **517(075) Б 50**

Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : учеб. для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - 10-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар : Лань, 2003. - 736 с. - (Учебники для вузов, Специальная литература). - Библиогр.: с. 736. - ISBN 5-8114-0499-9 : 280-00.

Кол-во экземпляров: всего - **30**

6. **517(075) Д 17**

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003. - 416 с. : ил. - С решениями. - ISBN 5-329-00528-0 : 72-00. - ISBN 5-94666-009-8 : 65-00. - ISBN 5-329-00327-X.

Кол-во экземпляров: всего - **52**

7. **517 3-17**

Зайцев И. А. Высшая математика : [учеб. пособие] / И. А. Зайцев. - 4-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2005. - 398 с. : ил. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 392. - Рек. М-вом образования РФ для с.-х. вузов. - ISBN 5-7107-9071-0 : 146-85.

Кол-во экземпляров: всего - **25**

5.3 Методическое обеспечение

8. Золотарёв А.П. «Числовые и функциональные ряды». Учебно-методическое пособие по курсу «Математика». – Новоуральск, изд. НТИ, 2005. – 26 с.