Сборник заданий
Контрольной работы по **математике**
для очно-заочной формы обучения
3 семестр второго курса
2024 г ИТ-23к

Каждый студент выполняет по одному заданию из семи задач, вариант – его номер в списке группы. При решении использовать конспект лекций, литературу из списка, справочник формул.

№1(6 баллов)Для каждого дифференциального уравнения

а) Определить его вид;
б) Найти общее решение (общий интеграл);
в) При указанных начальных условиях решить задачу Коши

Вариант №1
1) $x \cdot y' - 2y = 1$, $y(1)=1$;
2) $(p^2+1)\cdot\sqrt{s}\cdot ds + p\cdot s\cdot dp = 0$;
3) $(x-y)\cdot dx + (2y-x)\cdot dy = 0$, y=1 при x=1;

Вариант №2
1) $(x-y)\cdot dx + (y+x)\cdot dy = 0$, y=1 при x=1;
2) $2q\cdot(p+1)\cdot dq + p\cdot\sqrt{q}\cdot dp = 0$, p=1 при q=4;
3) $x\cdot y' - 4y = x^3$

Вариант №3
1) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2$, $y(1)=1$;
2) $cos(t)\cdot\sqrt{s}\cdot ds + sin(t)\cdot s\cdot dt = 0$
3) $y' = \dfrac{y}{x} - 2\sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$, y=1 при x=1;

Вариант №4
1) $x\cdot y' - 2y = x^3$, $y(1)=1$;
2) $(p^2+p)\cdot s\cdot ds + p\cdot s^3\cdot dp = 0$, p=1 при s=4;
3) $(x^2+2y^2)\cdot dx + 4x\cdot y\cdot dy = 0$;

Вариант №5
1) $y' - \dfrac{y}{x^2-1} = x-1$, $y(0)=1$;
2) $\sqrt[3]{cos(h)}\cdot e^t\cdot dh - \dfrac{t}{sin(h)}\cdot dt = 0$

3) $y' = 4\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$, y=1 при x=1;

Вариант №6

1) $(t-y)\cdot dt - (y+t)\cdot dy = 0$, t=1 при y=4;

2) $x\cdot y' + 3y = x^5$, $y(1)$=1;

3) $2q\cdot(p+1)\cdot dq + p\cdot\sqrt{q}\cdot dp = 0$

Вариант №7

1) $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$, y=1 при x=1;

2) $\frac{u}{p}\cdot du + p^2\cdot\sin^2(u^2)\cdot dp = 0$, p=1 при $u=\frac{\pi}{4}$;

3) $y' + y = e^x$.

Вариант №8

1) $(p^2+1)\cdot\sin\left(\frac{1}{s}\right)\cdot ds + p\cdot s^2\cdot dp = 0$;

2) $x\cdot y' + 2y = 1$, $y(0)$=1;

3) $(x-3y)\cdot dx + (2y-3x)\cdot dy = 0$, y=1 при x=2.

Вариант №9

1) $y' - \frac{4y}{x} = x$, $y(1)$=1;

2) $\cos^3(t)\cdot\sqrt{\ln(s)+2}\cdot ds + \sin(t)\cdot s\cdot dt = 0$

3) $y' - \frac{y}{x} = -\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$, y=0при x=2.

Вариант №10

1) $y' + \frac{2y}{x} = x^6$;

2) $\frac{dy}{dx} - \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y}{x}$, y=1 при x=1;

3) $\sin(t)\cdot(p^2+1)\cdot dt - \cos^2(t)\cdot p\cdot dp = 0$, p=1 при t=2.

Вариант №11

1) $(m^2+4)\cdot s\cdot ds - m\cdot(s^2-4)\cdot dm = 0$;

2) $\frac{dy}{dx} = y + x + 1$, $y(0)$=1;

3) $(x^2+2y^2)\cdot dy + 2x\cdot y\cdot dy = 0$, y=1 при x=1.

Вариант №12

1) $\sqrt[3]{\cos(h)}\cdot e^t\cdot dh - \frac{t}{\sin(h)}\cdot dt = 0$, h=1 при t=2;

2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y}{x}\cdot(\ln(y) - \ln(x))$;

3) $y' - \frac{y}{1-x^2} = 3$, $y(0)$=1.

Вариант №13 1) $(t-2s)\cdot dt-(s+2t)\cdot ds=0$;

2) $2x\cdot\dfrac{dy}{dx}-4y=x^6$, $y(1)=1$;

3) $2q\cdot(p+1)\cdot dp-2p\cdot\sqrt{q}\cdot dq=0$, $q=1$ при $p=1$.

Вариант №14 1) $(p^2+1)\cdot\sqrt{s}\cdot ds+p\cdot s\cdot dp=0$;

2) $(x-y)\cdot dx+(2y-x)\cdot dy=0$, $y=1$ при $x=1$;

3) $x\cdot y'-2y=1$, $y(1)=1$.

Вариант №15 1) $cos(t)\cdot\sqrt{s}\cdot ds+sin(t)\cdot s\cdot dt=0$, $s=1$ при $t=\dfrac{\pi}{6}$;

2) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^2$, $y(1)=2$;

3) $y'=\dfrac{y}{x}-2\sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Вариант №16 1) $x\cdot y'-4y=x^3$, $y(1)=-1$;

2) $(x-y)\cdot dx+(y+x)\cdot dy=0$, $y=1$ при $x=2$;

3) $2q\cdot(p+1)\cdot dq+p\cdot\sqrt{q}\cdot dp=0$.

Вариант №17 1) $y'+\dfrac{2y}{x}=x$;

2) $cos(t)\cdot\sqrt{p}\cdot dt+sin^2(t)\cdot p^2\cdot dp=0$, $p=1$ при $t=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $y'=\dfrac{y}{x}+2\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$.

Вариант №18 1) $(x^2+2y^2)\cdot dx+4x\cdot y\cdot dy=0$;

2) $(p^2+p)\cdot s\cdot ds+p\cdot s^3\cdot dp=0$, $p=1$ при $s=1$;

3) $x\cdot y'-2y=x^3$, $y(2)=1$.

Вариант №19 1) $\sqrt[3]{cos(h)}\cdot e^t\cdot dh-\dfrac{t}{sin(h)}\cdot dt=0$;

2) $y'=4\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{y}{x}$, $y(1)=1$;

3) $y'-\dfrac{y}{x^2-1}=x-1$, $y=1$ при $x=0$.

Вариант №20 1) $2q\cdot(p+1)\cdot dq+p\cdot\sqrt{q}\cdot dp=0$;

2) $(t-y)\cdot dt-(y+t)\cdot dy=0$, $y=1$ при $t=2$;

3) $x\cdot y'+3y=x^5$, $y(2)=1$.

№3 (6 баллов)Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений и выделить частное решение, если указаны начальные условия

Вариант №1

1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0;$

2) $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 6\cdot\dfrac{ds}{dt} + 8\cdot s(t) = 0, \qquad s(0) = 1,\ s'(0) = 0;$

3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №2

1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0;$

2) $\dfrac{d^3p}{dt^3} + 3\cdot\dfrac{d^2p}{dt^2} - 18\cdot\dfrac{dp}{dt} = 0, \qquad p(0) = 1,\ p'(0) = 0;$

3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

Вариант №3

1) $y''' + 6y'' + 25y' = 0\ ;$

2) $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0;$

3) $\dfrac{d^2s}{dp^2} + 8\cdot\dfrac{ds}{dp} + 16\cdot s(p) = 0\ .$

Вариант №4

1) $\dfrac{d^3L}{dt^3} + 10\cdot\dfrac{d^2L}{dt^2} + 29\cdot\dfrac{dL}{dt} = 0,$

2) $y'' + 8y' + 15y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0;$

3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Вариант №5

1) $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0;$

2) $\dfrac{d^2t}{dp^2} + 10\cdot\dfrac{dt}{dp} + 25\cdot t(p) = 0, \qquad t(0) = 3,\ t'(0) = 0;$

3) $y''' + 6y'' + 13y' = 0.$

Вариант №6

1) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0;$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0;$

3) $\dfrac{d^3T}{dt^3} + 6\cdot\dfrac{d^2T}{dt^2} + 41\cdot\dfrac{dT}{dt} = 0, \qquad T(0) = 1, T'(0) = 0.$

Вариант №7
1) $\frac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \frac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0$;

2) $y'' + 2y' - 15y = 0$;

3) $y''' + 6y'' + 25y' = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0.$

Вариант №8
1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0$;

2) $\frac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \frac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, \qquad s(0) = 1,\ s'(0) = 0$;

3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №9
1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0$;

2) $\frac{d^3 p}{dt^3} + 3 \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - 18 \cdot \frac{dp}{dt} = 0, \qquad p(0) = 1,\ p'(0) = 0$;

3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

Вариант №10
1) $y''' + 6y'' + 25y' = 0$;

2) $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

3) $\frac{d^2 s}{dp^2} + 8 \cdot \frac{ds}{dp} + 16 \cdot s(p) = 0$.

Вариант №11
1) $\frac{d^3 L}{dt^3} + 10 \cdot \frac{d^2 L}{dt^2} + 29 \cdot \frac{dL}{dt} = 0,$

2) $y'' + 8y' + 15y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Вариант №12
1) $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0$;

2) $\frac{d^2 t}{dp^2} + 10 \cdot \frac{dt}{dp} + 25 \cdot t(p) = 0, \qquad t(0) = 3,\ t'(0) = 0$;

3) $y''' + 6y'' + 13y' = 0.$

Вариант №13
1) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$;

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

3) $\frac{d^3 T}{dt^3} + 6 \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} + 41 \cdot \frac{dT}{dt} = 0, \quad T(0) = 1, T'(0) = T''(0) = 0.$

Вариант №14

1) $\frac{d^2s}{dp^2} + 8\cdot\frac{ds}{dp} + 16\cdot s(p) = 0$;

2) $y'' + 2y' - 15y = 0$;

3) $y''' + 6y'' + 25y' = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0.$

Вариант №15

1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0$;

2) $\frac{d^2s}{dt^2} + 6\cdot\frac{ds}{dt} + 8\cdot s(t) = 0, \qquad s(0) = 1,\ s'(0) = 0$;

3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №16

1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0$;

2) $\frac{d^3p}{dt^3} + 3\cdot\frac{d^2p}{dt^2} - 18\cdot\frac{dp}{dt} = 0, \qquad p(0) = 1,\ p'(0) = 0$;

3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

Вариант №17

1) $y''' + 6y'' + 25y' = 0$;

2) $y'' + 2y' - 15y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

3) $\frac{d^2s}{dp^2} + 8\cdot\frac{ds}{dp} + 16\cdot s(p) = 0$.

Вариант №18

1) $\frac{d^3L}{dt^3} + 10\cdot\frac{d^2L}{dt^2} + 29\cdot\frac{dL}{dt} = 0,$

2) $y'' + 8y' + 15y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

3) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Вариант №19

1) $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0$;

2) $\frac{d^2t}{dp^2} + 10\cdot\frac{dt}{dp} + 25\cdot t(p) = 0, \qquad t(0) = 3,\ t'(0) = 0$;

3) $y''' + 6y'' + 13y' = 0.$

Вариант №20

1) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$;

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

3) $\frac{d^3T}{dt^3} + 6\cdot\frac{d^2T}{dt^2} + 41\cdot\frac{dT}{dt} = 0, \qquad T(0) = 1, T'(0) = 0.$

№3(8 баллов) При начальных условиях y(0)= $y_o, y'(0) = y'_o$ найти решение уравнения $A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = f(x)$ (где $exp(a \cdot x) = e^{a \cdot x}$)

Вар.	Нач. условие		Коэффициенты ЛОДУ			Неоднородность $f(x)$
	y_o	y'_o	A	B	C	
1	5	4.5	2	−1	−1	$10 \cdot exp(2 \cdot x) - 7 \cdot sin(x) + cos(x) + 2 \cdot x$
2	0	19	2	16	50	$90 \cdot exp(2 \cdot x) - 32 \cdot cos(x) + 64 \cdot sin(x) + 118 - 100 \cdot x$
3	3	−6.5	2	1	−15	$-10 \cdot exp(2 \cdot x) + 19 \cdot cos(x) - 33 \cdot sin(x) - 62 + 30 \cdot x$
4	4	15	2	−16	34	$10 \cdot exp(2 \cdot x) - 48 \cdot cos(x) + 16 \cdot sin(x) + 66 - 68 \cdot x$
5	7	−6.5	2	3	−27	$-26 \cdot exp(2 \cdot x) + 35 \cdot cos(x) - 55 \cdot sin(x) - 60 + 54 \cdot x$
6	2	12	2	20	68	$116 \cdot exp(2 \cdot x) - 46 \cdot cos(x) + 86 \cdot sin(x) + 164 - 136 \cdot x$
7	5	4.5	2	5	3	$42 \cdot exp(2 \cdot x) + 9 \cdot cos(x) + 7 \cdot sin(x) + 2 - 6 \cdot x$
8	−4	−7	2	−8	10	$2 \cdot exp(2 \cdot x) - 16 \cdot cos(x) + 26 - 20 \cdot x$
9	−1	−28.5	2	−1	−55	$-98 \cdot exp(2 \cdot x) - 115 \cdot sin(x) - 108 + 55 \cdot cos(x) + 110 \cdot x$
10	4	1	2	24	90	$146 \cdot exp(2 \cdot x) - 64 \cdot cos(x) + 112 \cdot sin(x) + 222 - 180 \cdot x$
11	7	−0.5	2	9	−11	$30 \cdot exp(2 \cdot x) + 31 \cdot cos(x) - 17 \cdot sin(x) - 62 + 22 \cdot x$
12	−2	−6	2	−12	20	$4 \cdot exp(2 \cdot x) - 30 \cdot cos(x) + 6 \cdot sin(x) + 44 - 40 \cdot x$
13	1	−3.5	2	3	−9	$10 \cdot exp(2 \cdot x) + 17 \cdot cos(x) - 19 \cdot sin(x) - 24 + 18 \cdot x$
14	6	−5	2	16	50	$90 \cdot exp(2 \cdot x) - 32 \cdot cos(x) + 64 \cdot sin(x) + 118 - 100 \cdot x$
15	9	5.5	2	−5	−3	$-10 \cdot exp(2 \cdot x) - 5 \cdot cos(x) - 15 \cdot sin(x) - 2 + 6 \cdot x$
16	0	−1	2	−16	34	$10 \cdot exp(2 \cdot x) - 48 \cdot cos(x) + 16 \cdot sin(x) + 66 - 68 \cdot x$
17	3	5.5	2	7	5	$54 \cdot exp(2 \cdot x) + 11 \cdot cos(x) + 13 \cdot sin(x) - 4 - 10 \cdot x$
18	−2	32	2	20	68	$116 \cdot exp(2 \cdot x) - 46 \cdot cos(x) + 86 \cdot sin(x) + 164 - 136 \cdot x$
19	1	−3.5	2	9	−5	$42 \cdot exp(2 \cdot x) + 25 \cdot cos(x) - 5 \cdot sin(x) - 38 + 10 \cdot x$
20	2	5	2	−8	10	$2 \cdot exp(2 \cdot x) - 16 \cdot cos(x) + 26 - 20 \cdot x$

№4(4 балла)Дана система дифференциальных уравнений.

1) Найти методом исключения общее решение системы;
2) Записать общее решение системы в векторном виде;
3) Найти собственные числа и собственные векторы;
4) Изобразить эскиз интегральных кривых исходной системы в окрестности точки О(о; о) и исследовать такую точку покоя на устойчивость;
5) Из общего решения системы выделить частное решение системы при указанных начальных условиях.

Вариант №1 $\begin{cases} x'(t) = 9\cdot x + y \\ y'(t) = -78\cdot x - 10\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-6 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №2 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2\cdot x + 4\cdot y \end{cases}$, $x=-6 \quad y=-6 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №3 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20\cdot x - 8\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-5 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №4 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12\cdot x + 8\cdot y \end{cases}$, $x=2 \quad y=6 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №5 $\begin{cases} x'(t) = 9\cdot x + y \\ y'(t) = -98\cdot x - 12\cdot y \end{cases}$, $x=-2 \quad y=14 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №6 $\begin{cases} x'(t) = 11\cdot x + y \\ y'(t) = -136\cdot x - 14\cdot y \end{cases}$, $x=-2 \quad y=16 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №7 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20\cdot x - 8\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-5 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №8 $\begin{cases} x'(t) = 9\cdot x + y \\ y'(t) = -78\cdot x - 10\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-6 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №9 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2\cdot x + 4\cdot y \end{cases}$, $x=-6 \quad y=-6 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №10 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20\cdot x - 8\cdot y \end{cases}$, $x=1 \quad y=-5 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №11 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12\cdot x + 8\cdot y \end{cases}$, $x=2 \quad y=6 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №12 $\begin{cases} x'(t) = 9\cdot x + y \\ y'(t) = -98\cdot x - 12\cdot y \end{cases}$, $x=-2 \quad y=14 \quad$ при $\quad t=0.$

Вариант №13 $\begin{cases} x'(t) = 11 \cdot x + y \\ y'(t) = -136 \cdot x - 14 \cdot y \end{cases}$, $x = -2 \quad y = 16$ при $\mathrm{t} = 0.$

Вариант №14 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}$, $x = 1 \quad y = -5$ при $\mathrm{t} = 0.$

Вариант №15 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}$, $x = 1 \quad y = -6$ при $\mathrm{t} = 0.$

Вариант №16 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2 \cdot x + 4 \cdot y \end{cases}$, $x = -6 \quad y = -6$ при $\mathrm{t} = 0.$

Вариант №17 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -20 \cdot x - 8 \cdot y \end{cases}$, $x = 1 \quad y = -5$ при $\mathrm{t} = 0.$

Вариант №18 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -12 \cdot x + 8 \cdot y \end{cases}$, $x = 2 \quad y = 6$ при $\mathrm{t} = 0.$

Вариант №19 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -98 \cdot x - 12 \cdot y \end{cases}$, $x = -2 \quad y = 14$ при $\mathrm{t} = 0.$

Вариант №20 $\begin{cases} x'(t) = 11 \cdot x + y \\ y'(t) = -136 \cdot x - 14 \cdot y \end{cases}$, $x = -2 \quad y = 16$ при $\mathrm{t} = 0.$

№5(5 баллов)Исследовать числовой ряд на сходимость.
Для знакопеременных рядов исследовать также абсолютную сходимость

Вариант №1

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+\frac{14}{48}+\frac{17}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2-1}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{n!}$.

Вариант №2

1) $\frac{2}{3}-\frac{3}{6}+\frac{4}{12}-\frac{5}{24}+\frac{6}{48}-\frac{7}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cos(2n)}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{log_4(n+1)}$.

Вариант №3

1) $\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{24}+\frac{11}{120}+\frac{14}{720}+\frac{17}{5040}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,sin(n)}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^2(3n)$.

Вариант №4

1) $\frac{2}{5}-\frac{3}{7}+\frac{4}{9}-\frac{5}{11}+\frac{6}{13}-\frac{7}{15}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+2n}\right)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Вариант №5

1) $\frac{2}{2}+\frac{4}{6}+\frac{6}{18}+\frac{8}{54}+\frac{10}{162}+\frac{12}{486}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{4n+1}$.

Вариант №6

1) $\frac{2}{1}-\frac{4}{3}+\frac{6}{9}-\frac{8}{27}+\frac{10}{81}-\frac{12}{243}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2(2n)}{n^2+3n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{(n+1)^4}$.

Вариант №7

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+\frac{14}{48}+\frac{17}{96}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^2\left(\frac{3}{n}\right)$.

Вариант №8

1) $\frac{4}{5}-\frac{5}{9}+\frac{6}{13}-\frac{7}{17}+\frac{8}{21}-\frac{9}{25}+\ .....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot sin\left(\frac{2}{n+1}\right)$.

Вариант №9

1) $\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{8}{8}+\frac{11}{16}+\frac{14}{32}+\frac{17}{64}+.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-\sqrt[3]{n+1}}{n^3+2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n^3+1}$.

Вариант №10

1) $\frac{2}{1}-\frac{4}{1}+\frac{6}{2}-\frac{8}{6}+\frac{10}{24}-\frac{12}{120}+\frac{14}{720}-.....$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+3n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^3}{(n+1)^4}$.

Вариант №11

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+\frac{14}{48}+\frac{17}{96}+.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2-1}{n^3+2n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{n!}$.

Вариант №12

1) $\frac{2}{3}-\frac{3}{6}+\frac{4}{12}-\frac{5}{24}+\frac{6}{48}-\frac{7}{96}+.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{cos(2n)}{n^3+2n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{log_4(n+1)}$.

Вариант №13

1) $\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{24}+\frac{11}{120}+\frac{14}{720}+\frac{17}{5040}+.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,sin(n)}{n^3+2n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^2(3n)$.

Вариант №14

1) $\frac{2}{5}-\frac{3}{7}+\frac{4}{9}-\frac{5}{11}+\frac{6}{13}-\frac{7}{15}+.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n^3+2n}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Вариант №15

1) $\frac{2}{2}+\frac{4}{6}+\frac{6}{18}+\frac{8}{54}+\frac{10}{162}+\frac{12}{486}+.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+2n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{4n+1}$.

Вариант №16

1) $\frac{2}{1}-\frac{4}{3}+\frac{6}{9}-\frac{8}{27}+\frac{10}{81}-\frac{12}{243}+.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2(2n)}{n^2+3n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{(n+1)^4}$.

Вариант №17

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{11}{24}+\frac{14}{48}+\frac{17}{96}+.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+2n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^2\left(\frac{3}{n}\right)$.

Вариант №18

1) $\frac{4}{3}-\frac{5}{7}+\frac{6}{11}-\frac{7}{15}+\frac{8}{19}-\frac{9}{23}+\ .....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot sin\left(\frac{2}{n+1}\right)$.

Вариант №19

1) $\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{8}{8}+\frac{11}{16}+\frac{14}{32}+\frac{17}{64}+.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-\sqrt[3]{n+1}}{n^3+2n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n^3+1}$.

Вариант №20

1) $\frac{2}{1}-\frac{4}{1}+\frac{6}{2}-\frac{8}{6}+\frac{10}{24}-\frac{12}{120}+\frac{14}{720}-.....$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1-sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+3n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^3}{(n+1)^4}$.

№6(3 балла)Найти интервал и область сходимости степенного ряда

Вариант №1 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2}{n+1}\cdot(x+4)^n$; Вариант №2 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n+1}\cdot(x+5)^n$;

Вариант №3 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}\cdot(x-1)^n$; Вариант №4 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n+1}\cdot(x+5)^n$;

Вариант №5 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n+2}\cdot(x-3)^n$; Вариант №6 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\cdot(x+2)^n$;

Вариант №7 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2n}\cdot(x-1)^n$; Вариант №8 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\cdot(x+2)^n$;

Вариант №9 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n+2}\cdot(x-6)^n$; Вариант №10 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{n}\cdot(x+6)^n$;

Вариант №11 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2}{n+1}\cdot(x+4)^n$; Вариант №12 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n+1}\cdot(x+5)^n$;

Вариант №13 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}\cdot(x-1)^n$; Вариант №14 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n+2}\cdot(x+3)^n$;

Вариант №15 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n+2}\cdot(x-3)^n$; Вариант №16 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\cdot(x+2)^n$;

Вариант №17 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2n}\cdot(x-1)^n$; Вариант №18 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\cdot(x+2)^n$;

Вариант №19 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n+2}\cdot(x-6)^n$; Вариант №20 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{n}\cdot(x+6)^n$;

№7 (3 балла)Записать разложение функции *f(x)* в степенной ряд в окрестности точки $x = x_o$ и найти интервал сходимости полученного ряда

Вариант №1 1) $f(x) = 2e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №2 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №3 1) $f(x) = 2\cos(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$, $x_0 = 1$.

Вариант №4 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$, $x_0 = 2$.

Вариант №5 1) $f(x) = x \cdot e^{5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №6 1) $f(x) = (x-2) \cdot \sin(x-2)$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №7 1) $f(x) = 2\ln(x^2+1)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$, $x_0 = 2$.

Вариант №8 1) $f(x) = 2\sin(3x-3)$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$, $x_0 = 0$.

Вариант №9 1) $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №10 1) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x+6}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №11 1) $f(x) = 2e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №12 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №13 1) $f(x) = 2\cos(x^3)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$, $x_0 = 1$.

Вариант №14 1) $f(x) = 2\sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$, $x_0 = 2$.

Вариант №15 1) $f(x) = x \cdot e^{5x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Вариант №16 1) $f(x) = (x-2) \cdot \sin(x-2)$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$, $x_0 = 1$.

Вариант №17 1) $f(x) = 2\ln(x^2+1)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$, $x_0 = 2$.

Вариант №18 1) $f(x) = 2\sin(3x-3)$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$, $x_0 = 0$.

Вариант №19 1) $f(x)=x^2\cdot e^{-5x}$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x+3}$, $x_0=2$.

Вариант №20 1) $f(x)=x^2\cdot sin(x^3)$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\dfrac{2x+6}{x-3}$, $x_0=1$.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Новоуральский технологический институт
Кафедра высшей математики

Направление подготовки–15.03.05 - "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
Профиль – «Технология машиностроения» (**КМ-24з**)
Квалификация (степень) выпускника – академический бакалавр
Форма обучения – Заочная
Дисциплина – **МАТЕМАТИКА, 3 СЕМЕСТР**

Экзаменационный билет №1

№1Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2 \cdot y}{x} = 2x^2;$$

№2 Найти частное решение дифференциального уравнения

$$4y = -y'' - 48 \cdot cos(3x)$$

$$\begin{cases} y(o) = 5 \\ y'(o) = 4 \end{cases} ;$$

№3 Найти решение системы дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \cdot x + 2 \cdot y \\ y'(t) = 7 \cdot x + 3 \cdot y \end{cases} \quad x = 1,\ y = -10 \text{ при } t = 0 \quad ;$$

№4Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{n^3 + 1}$$

№5 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot (x+2)^n$.

Составил: ______________________________ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: ______________________________Носырев Н.А.

Новоуральск

4 Справочник

- *Теорема Коши:* Если дифференциальное уравнение (ДУ) имеет вид $y^{(n)} = F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)})$, где Fнепрерывная функция и в некоторой области существуют и конечны производные $\dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial (y')}, \dfrac{\partial F}{\partial (y'')}, ..., \dfrac{\partial F}{\partial (y^{(n-1)})}$,

  ТО для всякого начального условия из такой области найдётся решение ДУ и такое решение единственно;
- ДУ *с разделяющимися переменными*, если $f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0$, для него общий интеграл $\int \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int \dfrac{-g_2(y)}{g_1(y)} dy$, частный интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{-g_2(y)}{g_1(y)} dy$;
- Функция однороднаяизмеренияk, если $f(t \cdot x; t \cdot y) = t^k \cdot f(x; y)$. При однородности нулевого измерения $f(x; y) = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$;
- *Однородное* ДУ имеет вид $f_1(x; y) \cdot dx + f_2(x; y) \cdot dx = 0$, где $f_1(x; y)$ и $f_1(x; y)$ однородные одинакового измерения. Его можно представить в виде $\dfrac{dy}{dx} = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

  Выполнив замену $z(x) = \dfrac{y}{x}$, $y = z \cdot x$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \cdot x + z$, получим уравнение с разделяющимися переменными, в его общем решении или в общем интеграле выполняется обратная замена;
- *Линейное* ДУ $\dfrac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$. Метод Бернулли: ищем решение в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ и требуем выполнения $\dfrac{dv}{dx} - p(x) \cdot v = 0$ т.е. $v(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}$, тогда $u(x) = \int \dfrac{q(x)}{v(x)} dx$;
- Уравнение $a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)$ при $f(x) \equiv 0$ является Линейным Однородным ДУ (ЛОДУ), в противном случае ЛНДУ;

- *Определитель Вронского* для функций $y_1, y_2, ..., y_n$ находится

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots\ldots & y_n'' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

- Для *n*решений ЛОДУвыполнено:
  1) Они линейно независимы $\Leftrightarrow \quad W(x) \neq 0$;
  2) Они линейно зависимы$\Leftrightarrow \quad W(x) = 0$;
- Если дано ЛОДУ $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0,\ \ a_k = Const$, то характеристическое уравнение $a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot \lambda^2 + a_n \cdot \lambda = 0$
  .
- Если $a_0 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$, то $a_0 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_2 = 0$,

  А) $\left(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2\right) \Rightarrow y_{оро} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$;

  Б) $\left(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2\right) \Rightarrow y_{оро} = e^{\lambda_1 \cdot x}(c_1 + c_2 \cdot x)$;

  В) $\lambda_{1,2} = a \pm b \cdot i \Rightarrow y_{оро} = e^{a \cdot x} \cdot \left(c_1 \cdot \cos(b \cdot x) + c_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right) = c \cdot e^{a \cdot x} \sin(b \cdot x + \varphi)$,

  $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad tg(\varphi) = \dfrac{c_1}{c_2}$;
- Если дано ЛНДУ $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x),\ \ a_k = Const$
  то решение ищем в зависимости от корней характ-гоур-я

Вид неоднородности	Вид решения $y_{\text{чрн}}$
$P_m(x)$	$x^{t_1} \cdot Q_m(x)$ $t_1 -$ кратность корня $\lambda = 0$
$P_m(x) \cdot e^{a \cdot x}$	$x^{t_2} \cdot P_m(x) \cdot e^{a \cdot x}$ $t_2 -$ кратность корня $\lambda = a$
$A_1 \cdot \cos(b \cdot x) + A_2 \cdot \sin(b \cdot x)$	$x^{t_3} \cdot \left(B_1 \cdot \cos(b \cdot x) + B_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right)$ $t_3 -$ кратность корня $\lambda = 0 + b \cdot i$
$e^{a \cdot x}\left(A_1 \cdot \cos(b \cdot x) + A_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right)$	$x^{t_4} \cdot e^{a \cdot x}\left(B_1 \cdot \cos(b \cdot x) + B_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right)$ $t_4 -$ кратность корня $\lambda = a + b \cdot i$

$e^{a\cdot x}\left(P_m(x)\cdot\cos(b\cdot x)+R_k(x)\cdot\sin(b\cdot x)\right)$	$x^{t_4}\cdot e^{a\cdot x}\left(Q_w(x)\cdot\cos(b\cdot x)+S_w(x)\cdot\sin(b\cdot x)\right)$ $t_4 -$ кратность корня $\lambda=a+b\cdot i$, $w=\max(m;k)$
f_1+f_2	y_1+y_2, где $y_1 -$ решение при неодн-ти f_1 $y_1 -$ решение при неодн-ти f_2

$P_m(x) -$ известный многочлен степени nи A - известное число, $Q_m(x) -$ многочлен, для которого применяем метод неопределенных коэффициентов. Для этого предполагаемую функцию и её производные подставляем в исходное ДУ и приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях правой и левой частей уравнения. Решение полученной системы и есть коэффициенты в решении;

- После нахождения $y_{оро}$ и $y_{\text{чрн}}$ записывают общее решение для ЛНДУ в виде $y_{орн}=y_{оро}+y_{чрн}$. После этого учитывается начальное условие и выделяется частное решение при подстановке необходимых C_1, ... ,C_n;
- Метод вариации постоянных: Для ЛНДУ ищем решение соответствующего ЛОДУ и находим фундаментальную систему решений (ФСР) $y_1,\, y_2, ..., y_n$. Тогда можно искать решение неоднородного уравнения в виде $y=c_1(x)\cdot y_1+c_2(x)\cdot y_2+....+c_n(x)\cdot y_n$, где для производных неизвестных функций $c_k(x)$ выполнено

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1+c_2'(x)\cdot y_2+....+c_n'(x)\cdot y_n=0 \\ c_1'(x)\cdot y_1'+c_2'(x)\cdot y_2'+....+c_1'(x)\cdot y_n'=0 \\ \quad .... \\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)}+c_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)}+....+c_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)}=f(x) \end{cases}$$

- Система дифференциальных уравнений $\begin{cases} x''+2x-3y'+\sin(t)=0 \\ \dfrac{1}{2}\cdot y'''+2x'+y''-t=0 \end{cases}$

  с двумя искомыми функциями $x(t)$ и $y(t)$ имеет порядок $n=n_1+n_2=2+3$ (сумма старших порядков производных).

В каноническом виде она записывается $\begin{cases} x'' = -2x + 3y' - \sin(t) \\ y''' = -2x' - 2y'' + 2t \end{cases}$. К нормальному виду перейдём с увеличением числа искомых функций

$$\begin{cases} x'' = -2x + 3y' - \sin(t) \\ y''' = -2x' - 2y'' + 2t \\ x'(t) = y_3, \quad x(t) = y_1,\ y(t) = y_2, \\ y'(t) = y_4 \\ \left(y'(t)\right) = y_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3' = -2y_1 + 3y_4 - \sin(t) \\ y_5' = -2y_3 - 2y_4 + 2t \\ y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_4' = y_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -2y_1 + 3y_4 - \sin(t), \\ y_4' = y_5 \\ y_5' = -2y_3 - 2y_4 + 2t \end{cases} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(t) \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix};$$

- Решение системы ДУ методом исключения $\begin{cases} x'(t) = 6x + 3y \\ y'(t) = -3x - 4y \end{cases}$

1) $x'' = 6x' + 3y'$; 2) $x'' = 6x' + 3\cdot\left(-3x - 4y\right)$, $x'' = 6x' - 9x - 12y$;

2) $y = \dfrac{x' - 6x}{3} \Rightarrow x'' = 6x' - 9x - 12\cdot\dfrac{x' - 6x}{3}$, $x'' = 2x' + 15x$;

3) $x'' - 2x' - 15x = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$,

общее решение $x(t) = c_1 \cdot e^{-3\cdot t} + c_2 \cdot e^{5\cdot t}$;

4) $y = \dfrac{x' - 6x}{3} = \dfrac{1}{3}\left((-3c_1 \cdot e^{-3\cdot t} + 5c_2 \cdot e^{5\cdot t}) - 6(c_1 \cdot e^{-3\cdot t} + c_2 \cdot e^{5\cdot t})\right)$,

$y(t) = -3c_1 \cdot e^{-3t} - \dfrac{1}{3}c_2 \cdot e^{5t}$;

2) Общее решение системы $\begin{cases} x(t) = c_1 \cdot e^{-3\cdot t} + c_2 \cdot e^{5\cdot t} \\ y(t) = -3c_1 \cdot e^{-3t} - \dfrac{1}{3}c_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$

или $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$ т.е. собственные числа $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 5$, их собственные векторы $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ и коллинеарные им векторы;

- Виды интегральных кривых (траекторий) и точки покоя для линейной однородной системы 2-го порядка с постоянными коэффициентами (в зависимости от собственных чисел)

1) λ_1 и λ_2 действительные числа одного знака. Получаем искривленные параболы с общей вершиной, их ось задаёт один из собственных векторов (с наибольшим $|\lambda|$). Точка покоя — *узел*.

   1.1) При $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ точки удаляются от вершины с возрастанием параметра t(времени), узел неустойчивый;

   1.2) При $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ точки приближаются к вершине с возрастанием времени, узел устойчивый;

2) λ_1 и λ_2 действительные числа разных знаков, $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$. Получаем искривленные гиперболы с общим центром, для которых собственные векторы задают асимптоты. Их точки удаляются от центра и с возрастанием параметра t(времени)приближаются к оси, заданной вектором $\vec{h}_1$ (с положительным λ). Точка покоя — *седло*;

3) $\lambda_{1,2} = 0 \pm b \cdot i$ чисто мнимые. Получаем множество искривленных эллипсов с общим центром в начале координат и осями по собственным векторам. Точка покоя — *центр*;

4) $\lambda_{1,2} = a \pm b \cdot i$ комплексно-сопряженные. Получаем множество спиралей с бесконечным числом витков. Точка покоя — *фокус*.

   4.1) Если $a > 0$, то при вращении вокруг центра точки удаляются от него с возрастанием времени, фокус неустойчивый;

   4.2) Если $a < 0$, то при вращении вокруг центра точки приближаются к нему с возрастанием времени, фокус устойчивый;

5) При $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ получаем множество прямых, параллельных между собой и собственному вектору $\vec{h}_2$.

5.1) При $\lambda_2 > 0$ с возрастанием времени точки удаляются в обоих направлениях от прямой, заданной вектором $\vec{h}_1$;

5.2)При $\lambda_2 < 0$ с возрастанием времени точки приближаются в обоих направлениях к прямой, заданной вектором $\vec{h}_1$;

- Числовой ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$,

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ − частичная сумма ряда;

- Если $a_n = f(n)$ − общий член ряда, то записывают $\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \sum a_n$;
- Ряд *сходится*, если существует конечное число $S = \lim_{n\to\infty}(S_n)$,

  тогда S− сумма ряда, $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- *Геометрическая прогрессия* со знаменателем q

  $$\sum_{n=0}^{\infty} b_1 \cdot q^n = b_1 + (b_1 \cdot q) + (b_1 \cdot q^2) + ... + (b_1 \cdot q^n) + ... ,$$

  она сходится только при $|q| < 1$,

  её частичная сумма $S_n = \dfrac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ даёт $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$;
- *Необходимое* условие сходимости $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

  Из $|a_n| - \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ следует расходимость ряда;
- Для знакоположительных рядов ($a_n > 0$) выполнено

3) *Признак Даламбера*: если существует $p = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$,

$$\text{то} \quad \begin{cases} \text{при} \quad p < 1 \ \text{ряд сходится} \\ \text{при} \quad p > 1 \ \text{ряд расходится} \\ \text{при} \quad p = 1 \ \text{неопределённость} \end{cases} ;$$

4) *Признак Коши* (радикальный): если существует $q = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$,

то $\begin{cases} \text{при } \ q<1 \ \text{ ряд сходится} \\ \text{при } \ q>1 \ \text{ ряд расходится} \\ \text{при } \ q=1 \ \text{ неопределённость} \end{cases}$;

Напоминание: $\sqrt[n]{const} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \ \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1;$

5)*Интегральный* признак: Если найдётся непрерывная функция $f(x)$, что выполнено $f(n)=a_n, n\in\mathbb{N}$, то числовой ряд $\sum a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_M^{+\infty} f(x)\,dx$ одновременно сходятся либо одновременно расходятся;

6) Признак *эквивалентности*: Эквивалентные знакоположительные ряды одновременно сходятся либо одновременно расходятся. Если $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^k}$, то при $k>1$ ряд сходится, при $k\le 1$ ряд расходится;

- Знакопеременный ряд сходится*абсолютно*, если ряд $\sum a_n$ сходится и сходится ряд $\sum |a_n|$. Если $\sum a_n$ сходится, но ряд $\sum |a_n|$ расходится, то ряд сходится *условно* и можно подобрать перестановку и (или) группировку его элементов, при которой сумма ряда станет заданным произвольно числом;
- Теорема Лейбница: Если $\sum a_n$ знакочередующийся,

  То А) При выполнении $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ряд сходится;

  Б) Для сходящегося ряда выполнено $\left|S-S_n\right|<|a_{n+1}|$;

  В) Знак разности $(S-S_n)$ совпадает со знаком числа a_{n+1};
- Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\cdot(x-x_0)^n$ является *степенным* с центром сходимости $x=x_0$. Внутри интервала сходимости $(x_0-R;\, x_0+R)$ он сходится и вне такого интервала расходится.
- Радиус сходимости степенного ряда

  а) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right)$; б) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$;

- Ряд Тейлора $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \left(x-x_0\right)^n$, где $b_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;
- Основные разложения Маклорена в степенной ряд ($x_0=0$):

1) $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+.....+\dfrac{x^n}{n!}+....$;

2) $\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+....+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+.....$;

3) $\sin(x)=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-....+(-1)^{2n-1}\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}+.....$;

4) $\ln(1+x)=\dfrac{x^1}{1}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+....+(-1)^n\cdot\dfrac{x^n}{n}+.....$;

5) $\left(1+x\right)^m=1+\dfrac{m}{1!}\cdot x+\dfrac{m\cdot(m-1)}{2!}\cdot x^2+\dfrac{m\cdot(m-1)\cdot\left(m-2\right)}{3!}\cdot x^3+....$

5 Рекомендуемая литература

5.1 Основная литература:

1. **517(075)Ш 63**

Шипачев, В. С. Высшая математика : учеб. пособие для бакалавров / В. С. Шипачев. - 8-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, **2012**. - 447 с. - (Бакалавр, Базовый курс). - Рек. М-вом образования и науки РФ. - ISBN 978-5-9916-2031-4: 316-91.

Кол-во экземпляров: всего - **10**

2. **517(075)Б 74**

Богомолов Н. В. Математика : учеб.для бакалавров / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, **2013**. - 396 с. - (Бакалавр, Базовый курс). - Допущено М-вом образования и науки РФ.
- ISBN 978-5-9916-2568-5 : 336-55.

Кол-во экземпляров: всего –**15**

3. **Фролов С.В.** Высшая математика [*Электронный ресур*с]: учеб. пособие/ Фролов С.В., Багаутдинова А.Ш.— [*Электрон. текстовые данные*]— СПб.: ГИОРД, **2012**.— 616 с.— Режим доступа: ЭБС «IPRbooks», по паролю
4. **Туганбаев А. А.** Основы высшей математики : учеб.пособие для ВПО/А. А. Туганбаев. – 1-е изд. [*Электронный ресурс]* — СПб. : Лань, **2011**. — 491 с. - Режим доступа «ЭБС ЛАНЬ»

5.2 Дополнительная литература:

5. **517(075) Б 50**

Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : учеб.для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - 10-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар : Лань, 2003. - 736 с. - (Учебники для вузов, Специальная литература). - Библиогр.: с. 736.
- ISBN 5-8114-0499-9 : 280-00.

Кол-во экземпляров: всего – 30

6. **517(075) Д 17**

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб.пособие для вузов : в 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003. - 416 с. : ил. - С решениями. - ISBN 5-329-00528-0 : 72-00. - ISBN 5-94666-009-8 : 65-00. - ISBN 5-329-00327-X.

Кол-во экземпляров: всего – 52

7. **517 З-17**

Зайцев И. А. Высшая математика : [учеб.пособие] / И. А. Зайцев. - 4-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2005. - 398 с. : ил. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 392. - Рек. М-вом образования РФ для с.-х. вузов. - ISBN 5-7107-9071-0 : 146-85.

Кол-во экземпляров: всего - 25

5.3 Методическое обеспечение

8. Золотарёв А.П. «Числовые и функциональные ряды». Учебно-методическое пособие по курсу «Математика». – Новоуральск, изд. НТИ, 2005. – 26 с.