

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

Должность: Руководитель НТИ НИЯУ МИФИ

высшего образования

Дата подписания: 26.02.2024 17:31:31
"Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

Уникальный программный ключ:

8c65c591e26b2d8e460927740cf752622aa3b295

НОВОУРАЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра общенаучных дисциплин

УТВЕРЖДЕНА

Ученым советом НТИ НИЯУ МИФИ

Протокол № 1 «30 января» 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «Математика»

Направление подготовки: **09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»**

Профиль подготовки: «Автоматизированные системы обработки информации и управления»

Квалификация (степень)

выпускника: Бакалавр

Форма обучения: очная

г. Новоуральск – 2024

Рабочая программа учебной дисциплины «Математика» для
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Курс 1, 2 семестры 1, 2, 3

Объём учебных занятий в часах:

Аудиторные занятия:

1 семестр: лекции – 18, практика – 36, всего 54 ч., 5 ЗЕТ;

2 семестр: лекции – 36, практика – 34, всего 70 ч., 4 ЗЕТ;

3 семестр: лекции – 18, практика – 36, всего 54 ч., 4 ЗЕТ;

Контроль: 178 ч.

Самостоятельная работа: 81, 47, 54 ч., всего 188ч.

Общий объём курса – 468 ч.

Трудоёмкость $5+4+4=13$ ЗЕТ

Форма отчётности –

1 семестр: экзамен;

2 семестр: экзамен;

3 семестр: экзамен.

Учебную программу составил ст. преподаватель каф. ОНД НТИ НИЯУ МИФИ
Орлов Юрий Владимирович

СОДЕРЖАНИЕ

№	СОДЕРЖАНИЕ	СТР
1	ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	3
2	МЕСТО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО.....	4
3	КОМПЕТЕНЦИИ	5
4	СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ	
	4.1 1-Й СЕМЕСТР	7
	4.2 2-Й СЕМЕСТР	8
	4.3 3-Й СЕМЕСТР	9
5	СОДЕРЖАНИЕ КУРСА	
	5.1 СОДЕРЖАНИЕ 1 СЕМЕСТРА.....	10
	5.1 СОДЕРЖАНИЕ 2 СЕМЕСТРА.....	13
	5.1 СОДЕРЖАНИЕ 3 СЕМЕСТРА.....	15
6	ФОС	
	6.1 ТР№1 Матрицы и решение линейных систем	18
	6.2 ТР №2 Векторы	18
	6.3 АКР №1 Прямая на плоскости	18
	6.4 ТР №3 Линии и поверхности	19
	6.5 АКР №2 Графики функций	19
	6.6 ТР №4 Пределы. Непрерывность	19
	6.6 ТР №5 Производная функции одной переменной	19
	6.7 ТР №6 Интегрирование	20
	6.8 ТР №7 Числовые и функциональные ряды	21
	6.9 АКР №3 Ряд Фурье	21
	6.10 ТР №8 Функции нескольких переменных	22
	6.11 ТР №9 Дифференциальные уравнения первого порядка	22
	6.12 АКР №4 Метод Эйлера решения линейных однор.ДУ	22
	6.13 ТР №10 Линейные неоднородные ДУ	22
	6.14 АКР №5 Системы дифференциальных уравнений	22
7	ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА	25
8	УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ	26
9	МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ	28

1 ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения учебной дисциплины "Математика" является воспитание достаточно высокой математической культуры, развитие у студентов широкого кругозора в области математики и умения использовать математические методы и основы математического моделирования для решения практических задач.

2 МЕСТО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Данная учебная дисциплина входит в Естественнонаучный образовательный модуль Естественнонаучный модуль ФГОС-3 по направлению подготовки ВПО 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» профиля подготовки бакалавров "Автоматизированные системы обработки информации и управления".

Методы, развиваемые в курсе, являются базовыми при изучении других компонентов цикла. Вместе с курсом «Математика» студенты этой группы изучают и другие математические дисциплины «Теория вероятностей и мат. статистика», «Мат. логика и теория алгоритмов» , «Дискретная математика» «Теория функции комплексной переменной»

3 КОМПЕТЕНЦИИ СТУДЕНТА, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ, ОЖИДАЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ И КОМПЕТЕНЦИИ СТУДЕНТА ПО ЗАВЕРШЕНИИ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Данная дисциплина участвует в формировании следующих компетенций:

ОКП-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;

УКЕ-1 Способен использовать знания естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в поставленных задачах;

В14 Формирование глубокого понимания социальной роли профессии, позитивной и активной установки на ценность избранной специальности, ответственного отношения к профессиональной деятельности, труду;

В15 Формирование психологической готовности к профессиональной деятельности по избранной профессии.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать основные понятия векторной и линейной алгебры, основы аналитической и дифференциальной геометрии, основные понятия дифференциального и интегрального исчисления.

Уметь применять математические методы векторной и линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, теорию рядов и дифференциальных уравнений при решении конкретных инженерных задач.

Владеть: методами решения систем линейных уравнений, методами нахождения ранга матрицы и обратной матрицы, методами решения типовых задач по темам: прямая на плоскости, плоскость и прямые в пространстве, методами исследования функций и построения их графиков, методами решения типовых задач геометрии и физики на основе интегрального исчисления, методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений I и II порядка, методами исследования сходимости числовых и функциональных рядов.

Дисциплина изучается 3 семестра и включает следующие разделы:

- матрицы и системы линейных уравнений,
- основы векторной алгебры,
- прямая на плоскости,
- плоскости и прямые в пространстве,
- кривые и поверхности второго порядка,
- дифференциальное исчисление функций одной переменной,
- применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков,
- интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения,
- функции нескольких переменных, их оптимизация,
- числовые и функциональные ряды,
- ряд и интеграл Фурье,
- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- системы дифференциальных уравнений.

4 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 1 семестр

Недели	Тема	Виды учебной деятельности			Отчётность		
		Лекции	Практики	СРС	вид	выдача	сдача
1-2	Матрицы, определители	2	4	20	ТР №1	2 н.	6 н.
3-4	Решения линейных систем	2	4				
5	Общее решение линейной системы	2	2				
6-7	Действия над векторами	2	2	20	ТР №2	6 н.	9 н.
8-9	Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов	2	4				
10-11	Прямая на плоскости	2	2	20	АКР №1		
12	Плоскость в пространстве	1	4	21	ТР №3	11 н.	18 н
13	Прямая в пространстве	1	2				
14-15	Линии 2-го порядка	2	4				
16	Поверхности 2-го порядка	1	4				
17-18	Преобразования плоскости и пространства. Приведение линий и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду	1	4				
Итого:		18	36	81	4 ТР, 2 АКР	Экзамен	

ТР №1 «Матрицы. Линейные системы»,

ТР №2 «Векторы»,

АКР №1 «Прямая на плоскости»,

ТР №3 «Линии и поверхности».

4.2 2 семестр

Недели	Тема	Виды учебной деятельности			Отчётность		
		Лекции	Практики	СРР	вид	выдана	сдана
1	Предел последовательности	2	4	14	ТР №4	1 н.	4 н.
2-3	Пределы функции	4	4				
4	Непрерывность функции	2	2				
5-7	Производная для f(x)	2	4	16	ТР №5	5 н.	10 н.
8	Экстремум f(x)	2	2				
9	Исследование f(x), построение её графика	2	4				
10	Задачи оптимизации f(x)	2	4				
11	Неопределённый и определённый интегралы	4	2	17	ТР №6	11 н.	18 н.
12-13	Замена переменной и интегрирование по частям в интегралах	4	2				
14-15	Вычисления интегралов	4	2				
16-17	Применения интегралов	6	2				
18	Несобственные интегралы	2	2				
Итого:	36	36	34	47	3 ТР	Экзамен	

ТР №4 «Пределы, графики и непрерывность функции».

ТР №5 «Производная функции одной переменной»,

ТР №6 «Интегрирование».

4.3 3 семестр

Недели	Тема	Виды учебной деятельности			Отчётность		
		Лекции	Практики	СРС	вид	выдача	сдача
1	Сходимость числовых рядов	2	2	8	ТР №7	2 н.	5 н.
2	Функциональные ряды	2	2				
3-4	Применение степенных рядов	2	4				
5-6	Ряд Фурье и интеграл Фурье	2	4	6	АКР №3		
7-8	Функции нескольких переменных (ФНП)	1	4	6	ТР №8	8 н.	10 н.
8-9	Экстремумы ФНП	1	4				
10-12	ДУ первого порядка	1	4	8	ТР №9	10 н.	12 н.
13	ЛОДУ	1	2	6	АКР №4		
14	ЛНДУ	2	2	9	ТР №10	13 н.	16 н.
15	Анализ механических и электрических колебаний	2	2				
16-17	Системы ДУ	1	4	7	АКР №5		
18	Анализ колебаний двух функций	1	2				
Итого:		18	36	54	4 ТР, 3 АКР	экзамен	

ТР №7 «Числовые и функциональные ряды»,
 АКР №3 «Ряд Фурье»,
 ТР №8 «Функции нескольких переменных»
 ТР №9 «Диф. уравнения первого порядка»,
 АКР №4 «Линейные однородные диф.уравнения»
 ТР №10 «Линейные неоднородные диф.уравнения»,
 АКР №5 «Системы диф.уравнений»

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 13 единиц ЗЕТ, 468 часов.

5 СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

5.1 Содержание 1 семестра

Матричное исчисление

1. Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц.
2. Определители второго и третьего порядка: определение, правило вычисления и основные свойства. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента, раскрытие определителя по строке или столбцу.
3. Общее определение определителя n -го порядка. Задача о расстановке ладей на шахматной доске. Вычисление определителя четвёртого порядка.
4. Обратная матрица: определение, теорема о существовании обратной матрицы (способ нахождения A^{-1}), проверка полученного результата.

Решения систем линейных уравнений

5. Система линейных уравнений, определение ее решения. Метод Крамера нахождения решений линейной системы. Теорема Крамера. Матричная запись линейной системы. Матричный метод нахождения решения линейной системы.
6. Метод Гаусса и Жордана-Гаусса решения линейной системы. Случаи единственного решения, множества решений и отсутствия решений.
7. Однородная линейная система, существование ее нетривиального решения, базисные и свободные переменные при этом.

Векторное исчисление

8. Скалярные и векторные величины. Способы задания векторов. Действия над векторами (графически): сравнение, умножение на число, сумма и разность. Основные свойства действий над векторами.
9. Линейная зависимость системы векторов. Размерность векторного пространства (прямой, плоскости, пространства). Аффинный базис, аффинные координаты вектора, нахождение их геометрически.
10. Скалярное произведение векторов: определение, основные свойства. Косинус угла между векторами. Модуль вектора. Проекция вектора на ось.
11. Декартова система координат, базисные векторы. Декартовы координаты вектора, запись вектора через базисные. Связь точек и векторов. Сравнение, умножение на число, сумма, разность векторов в координатной форме.
12. Вывести правило скалярного произведения векторов в декартовых координатах. Модуль вектора, расстояние между точками и угол между векторами в координатной форме.
13. Правая тройка векторов. Векторное произведение: определение и основные свойства, геометрический смысл, синус угла между векторами.
14. Вывести векторное произведение двух векторов в координатной форме. Площадь треугольника, заданного координатами вершин с помощью векторного произведения.

15. Смешанное произведение: определение, основные свойства и правило вычисления в координатной форме, геометрический смысл, проверка линейной зависимости.

Прямая на плоскости

16. Способы задания линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве по Декарту и Жордану. Полярная система координат.
17. Уравнения прямой на плоскости: векторное, параметрическое, через две точки, каноническое, с угловым коэффициентом, общее, в отрезках и нормальное. Связь направляющего и нормального векторов прямой.
18. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (по уравнениям), параллельность, перпендикулярность, точка пересечения. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Проекция точки на прямую.

Плоскость и прямая в пространстве

19. Уравнения плоскости в пространстве: векторное, параметрическое, через три точки (точку и два направляющих вектора), общее, в отрезках и нормальное
20. Связь нормального и направляющих векторов плоскости. Взаимное расположение плоскостей (параллельность, совпадение, пересечение, перпендикулярность) по уравнениям. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.
21. Уравнения прямой в пространстве: векторное, параметрическое, по двум точкам, каноническое, общее, через проектирующие плоскости.
22. Взаимное расположение прямой и плоскости: параллельность, пересечение, перпендикулярность, проекция точки на плоскость, симметрия точки относительно плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
23. Взаимное расположение двух прямых в пространстве по уравнениям: пересечение (точка пересечения), параллельность (расстояние), скрещивание (наименьшее расстояние).

Линии и поверхности второго порядка

24. Эллипс: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
25. Гипербола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
26. Парабола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
27. Общее уравнение линии второго порядка, приведение к каноническому уравнению по общему (при отсутствии $x \cdot y$) выделением полных квадратов.
28. Директориальное свойство эллипса и гиперболы, правило нахождения их канонического уравнения.
29. Нахождение уравнения окружности по трем точкам.
30. Классификация линий второго порядка на плоскости. Цилиндрические и конические сечения.
31. Канонические уравнения и эскизы поверхностей второго порядка: эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов.
32. Линейчатые поверхности (гиперболоид и параболоид). Цилиндрические и конические поверхности. Классификация поверхностей второго порядка.

Функции одной переменной

36. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимнообратных функций.
37. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.
38. Преобразования, влияющие на график функции $(f(x)+c, f(x+c), c \cdot f(x), f(c \cdot x), |f(x)|, f(|x-c|)$. Графики линейной, параболической, дробно-линейной функций и $y=A \cdot \sin(\omega \cdot x + \omega_0)$.

5.2 Содержание 2 семестра

Предел и непрерывность функции одной переменной

1. Определение числовой последовательности и её предела. Свойства пределов последовательности.
2. Определение предела функции в точке. Бесконечный предел и предел на бесконечности. Свойства пределов.
3. Бесконечно малая функция (БМ). Сравнение БМ: эквивалентность, символ "о". Доказательство первого замечательного предела, его применение. Основные эквивалентности БМ в пределах.
4. Бесконечно большая функция (ББ). Сравнение ББ: эквивалентность, символ "О". Шкала ББ при $x \rightarrow \infty$, её применение.
5. Связь БМ, ББ и других функций. Основные виды неопределенностей в пределах, способы их раскрытия. Второй замечательный предел, правило его применения.
6. Непрерывность функции в точке. Частичные пределы, их связь с непрерывностью. Точки разрыва функции, их классификация.
7. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства непрерывных в точке функций.
8. Свойства непрерывных на отрезке функций (с доказательствами): сохранение знака, ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, поиск корня $f(x)=0$ методом половинного деления, промежуточные значения на отрезке.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

9. Производная функции $f(x)$: определение, геометрический смысл с уравнением касательной и нормали, физический смысл. Свойства производных.
10. Производные основных функций (x^n , a^x , $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$) с доказательствами.
11. Приращение дифференцируемой функции, понятие дифференциала и его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы дифференциала, его применение в приближенных вычислениях.
12. Производная обратной функции. Выведение производных $\arcsin(x)$, $\arctg(x)$. Производная неявно заданной функции.
13. Логарифмическое дифференцирование. Понятие гиперболических функций, их производные.
14. Свойства дифференцируемых на отрезке функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши
15. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, её коэффициенты и остаточный член в формах Пеано и Лагранжа.
16. Разложения $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^n$ по формуле Маклорена.
17. Производные $y'_x(x)$, $y''_{xx}(x)$, $y'''_{xxx}(x)$... для функции, заданной

параметрически.

18. Определение точки экстремума. Связь монотонности функции и знака ее производной. Теорема Ферма (необходимое условие точек экстремума). Достаточные условия экстремума:
 - а) с помощью знака первой производной;
 - б) с помощью производных старших порядков.
19. Алгоритм нахождения точек экстремума. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, примеры задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.
20. Определение выпуклой (вогнутой) на отрезке функции. Связь выпуклости со знаком второй производной. Алгоритм нахождения точек перегиба.
21. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределах.
22. Понятие асимптоты графика функций, их виды и способы нахождения.
23. Общий план исследования функций и построения графика функции.

Интегрирование

24. Определение первообразной для $f(x)$ на $[a; b]$, теорема о двух первообразных. Неопределенный интеграл (НИ), его основные свойства. Таблица основных интегралов.
25. Определенный интеграл (ОИ) для $f(x)$, как предел интегральных сумм, его основные свойства, теорема о среднем.
26. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной.
27. Формула Ньютона-Лейбница.
28. Замена переменной в НИ и ОИ.
29. Интегрирование по частям в НИ, ОИ, основные случаи.
30. Вычисление некоторых НИ методом неопределенных коэффициентов.
31. Дробно-рациональная функция, алгоритм ее разложения на сумму элементарных дробей:
 - а) выделение целой части, алгоритм "деления столбиком";
 - б) разложение многочлена на неприводимые множители, кратность корня;
 - в) метод неопределенных коэффициентов разложения на элементарные дроби.
32. Интегралы от элементарных дробей. Общий план интегрирования дробно-рациональных функций.
33. Интегралы от тригонометрических функций: перечислить основные случаи и способы интегрирования данных интегралов.
34. Интегралы от иррациональных функций. Примеры "неберущихся" интегралов.
35. Нахождение площади криволинейной трапеции и площадей плоских фигур с помощью ОИ (ограниченных $y_i=f_i(x)$; параметрически заданными).
36. Площадь криволинейного сектора. Нахождение площади фигуры в полярных координатах.
37. Объем тела по поперечным сечениям. Объем тела вращения с помощью ОИ.
38. Несобственный интеграл I рода, определение и критерии его сходимости.
39. Несобственный интеграл II рода, определение и критерии его сходимости.

5.3 Содержание 3 семестра

Числовые и функциональные ряды

- 1 Определение числового ряда, его частичных сумм и суммы, сходимости и расходимости. Сходимость геометрической прогрессии, ее сумма.
- 2 Признаки сходимости числового ряда: необходимый, сравнения и эквивалентности, интегральный и сходимость $\sum \frac{1}{n^p}$, Даламбера и Коши.
- 3 Знакопеременный и знакочередующийся ряды. Теорема Лейбница (признак Лейбница) о сходимости знакочередующегося ряда и оценке его суммы.
- 4 Функциональный ряд, определение его области сходимости. Степенной ряд. Теорема Абеля, интервал и радиус сходимости степенного ряда.
- 5 Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда, вычисление суммы степенного ряда сведением к геометрической прогрессии (или другому ряду).
- 6 Ряды Тейлора и Маклорена, их коэффициенты. Разложения в степенной ряд $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , $\ln(1+x)$ и др. Оценка погрешности.
- 7 Приближенные вычисления чисел e и π , вычисления определенных интегралов с помощью степенных рядов.

Ряд и интеграл Фурье

- 8 Абстрактный ряд Фурье при заданном скалярном произведении функций, проверка системы функций на ортонормированность, коэффициенты ряда;
- 9 Проверка ортогональности тригонометрической системы функций на отрезке $[-\pi; \pi]$, нормы таких функций, коэффициенты ряда при скалярном

произведении $f(x) \circ g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cdot g(x)) dx$. Тригонометрический ряд

Фурье для заданной на $[-\pi; \pi]$ функции.

- 10 Кусочная непрерывность и кусочная монотонность функции. Теорема о разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi; \pi]$ и его сумме. Частичная сумма ряда Фурье как наложение гармоник.
- 11 Тригонометрическая система функций на $[-L; L]$, вид ряда Фурье по ним, его коэффициенты. Теорема о разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье на $[-L; L]$ и его сумме.
- 12 Разложение в ряд Фурье для чётных, нечётных и периодических функций. Периодическое продолжение заданной на отрезке функции на числовую прямую и ряд Фурье для нее. Ряд Фурье для функции, заданной на половине периода, её разложение по синусам и по косинусам.
- 13 Интеграл Фурье как предел для ряда Фурье при $L \rightarrow \infty$. Три различных способа записи интеграла Фурье. Тригонометрические и показательное преобразование Фурье и обратного преобразования Фурье.

Дифференциальное исчисление

Функции нескольких переменных

14. Область нескольких переменных, окрестность точки. Открытая и замкнутая области нескольких переменных. Функции нескольких переменных (ФНП): определение, способы задания. Геометрический смысл $Z=f(x,y)$, линии уровня.
15. Предел ФНП в точке. Непрерывность ФНП в точке. Основные свойства непрерывных ФНП.
16. Определение частной производной ФНП, правила их вычисления. Геометрический смысл частных производных для $Z=f(x, y)$. Уравнение касательной плоскости и нормали.
17. Полный дифференциал ФНП, связь с Δf , инвариантность его формы. Полная производная по переменной t . Производная неявной функции.
18. Производная по направлению. Градиент функции: определение, правила вычисления, связь с производной по направлению и с линией (поверхностью) уровня.
19. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных ФНП. Дифференциалы высших порядков для ФНП, их коэффициенты для $f(x, y)$ (Треугольник Паскаля и бином Ньютона). Формула Тейлора для ФНП. Приближенные вычисления.
20. Точки экстремума ФНП. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума в общем виде и для $f(x, y)$, характер экстремума.
21. Условный экстремум ФНП. Метод множителей Лагранжа и метод подстановки.
22. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой ограниченной области (план).
23. Метод наименьших квадратов (НК). Нахождение коэффициентов линейной, параболической функций и др. методом НК.
24. Постановка задачи математического программирования. Вид задачи линейного программирования (ЗЛП), выпуклость области её решений.
25. Графический метод решения ЗЛП.

Дифференциальные уравнения первого порядка

26. Общие понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ): ДУ, его решение, общее и частное решения, начальные и краевые условия, интегральная кривая, задача Коши. Теорема Коши для ДУ 1 порядка.
27. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными, их решения. Сведение текстовой задачи к решению ДУ на примере задачи о распаде радия и о непрерывном растворении соли (или другой задачи).
28. Однородные функции двух переменных. Общий вид и правило интегрирования однородных диф.уравнений. Уравнения, приводящиеся к однородным, их интегрирование.
29. Линейные ДУ первого порядка, методы Бернулли и вариации постоянной для их интегрирования.

30. Уравнение Бернулли, его интегрирование непосредственно и сведением к линейному ДУ.
31. Функции нескольких переменных: геометрический смысл $z=f(x; y)$, частные производные, полный дифференциал, градиент. Смешанные производные.
32. Уравнение в полных дифференциалах: общий вид, правило интегрирования и физический смысл.
33. Методы Эйлера и изоклин приближенного построения интегральных кривых.

Дифференциальные уравнения старших порядков

34. ДУ n -го порядка. Случаи ДУ, допускающих понижение порядка.
35. Линейное ДУ n -го порядка: общий вид, свойства решений, структура общего решения.
36. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского. Теорема о связи определителя Вронского с линейной зависимостью решений линейного однородного ДУ. Фундаментальная система решений и общее решение при этом.
37. Линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами: общий вид, метод Эйлера его решения, характеристическое уравнение. Общее решение линейного ДУ при известных корнях характеристического уравнения:
 - а) Корни действительные, различные,
 - б) Корни кратные, в) Корни комплексные, сопряженные.
38. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ при неоднородности специального вида (метод подбора):
 - а) $P_n(x)$, б) $P_n(x) \cdot e^{ax}$, в) $e^{ax} \cdot (A \cos(bx) + B \sin(bx))$, г) Сумма функций.
 Нахождение коэффициентов предполагаемого решения.
39. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ методом вариации постоянных.
40. ДУ, описывающее механические колебания. Случаи свободных, затухающих, вынужденных колебаний. Случай резонанса.

Системы дифференциальных уравнений

41. Каноническая и нормальная формы системы ДУ. Решение системы ДУ, общее и частное решения. Начальные условия. Теорема о существовании и единственности решения системы ДУ.
42. Сведение ДУ к системе ДУ в нормальной форме, системы ДУ к одному дифференциальному уравнению (метод исключения).
43. Системы линейных уравнений, свойства решений однородных систем и неоднородных систем ДУ. Определитель Вронского системы ДУ, его свойства. ФСР системы ЛОДУ.
44. Нахождение решений линейной однородной системы методом исключения.
45. Нахождение решений линейной однородной системы с помощью собственных векторов.
46. Нахождение решений линейной неоднородной однородной системы методом вариации постоянных.

6 ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОДИН ВАРИАНТ)

6.1 ТР №1 Матрицы и решение линейных систем

1) Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найти: $(A-2B)+(B^T-C)$; $A \cdot (B \cdot C)$, A^{-1} и B^{-1} с проверкой результатов.

2) Вычислить определители матриц A, B, C, D

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Решить систему уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 7x + 3y = 24 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 2x + 3y - 3z = -2 \\ -x + y - 3z = -1 \end{cases}; \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 10 \end{cases}.$$

6.2 ТР №2 Векторы

1) В базисе $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ с модулями $|\vec{e}_1|$, $|\vec{e}_2|$ и углом между ними $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \varphi$

заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$ \vec{e}_1 = 4$	$ \vec{e}_2 = 7$	$\varphi = 30^\circ$	$\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$	$\vec{b} = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
-------------------	-------------------	----------------------	-------------------------------------	------------------------------------

Найти $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

2) Для векторов $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; 2; 1)$, $\vec{c} = (2; -2; 3)$ найти

а) $(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(\vec{b} - 2\vec{c})$; б) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$; в) $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{c}$;

г) Смешанное произведение; д) Разложение по ним вектора $\vec{d} = (1; 2; 1)$;

е) Углы между ними.

6.3 АКР №1 Прямая на плоскости

Записать все виды уравнений прямой (в плоскости xOy), проходящей по точкам A=(-2; 3) и B=(4; 1).

Найти расстояние до нее от точки C=(-2; -5), точку пересечения и угол с прямой $y=2x+1$. Найти центр тяжести и площадь треугольника ABC.

6.4 ТР №3 Линии и поверхности

- 1) В пирамиде ABCD с вершинами $A=(1; 2; 3)$, $B=(-1; 3; 2)$, $C=(-4; 2; 5)$ и $D=(3; 2; -1)$ найти угол между гранями ABC и ABD, длину высоты из D на ABC, площадь основания ABC и объём пирамиды.
- 2) Изобразить на плоскости XOY линию, заданную уравнением
 - а) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$; б) $18x^2 + 108x + 562 - 50y^2 - 100y = 0$;
 - в) $6x + 2y^2 - 12y + 42 = 0$,
найти ее параметры $a, b, c, e, (p)$, координаты центра (вершины) и фокусов.
- 3) Изобразить поверхность, заданную уравнением $2x^2 + 4x - 4y^2 - 12z^2 = 12$.

6.5 АКР №2 Графики функций

Построить графики функций

- а) $y = 2x - 3$; б) $y = 2(x+1)^2 - 3$; в) $y = 3 - \frac{2}{x+1}$; г) $y = 2\sin(3x-2) + 4$.

6.6 ТР №4 Пределы. Непрерывность

- 1) Вычислить пределы

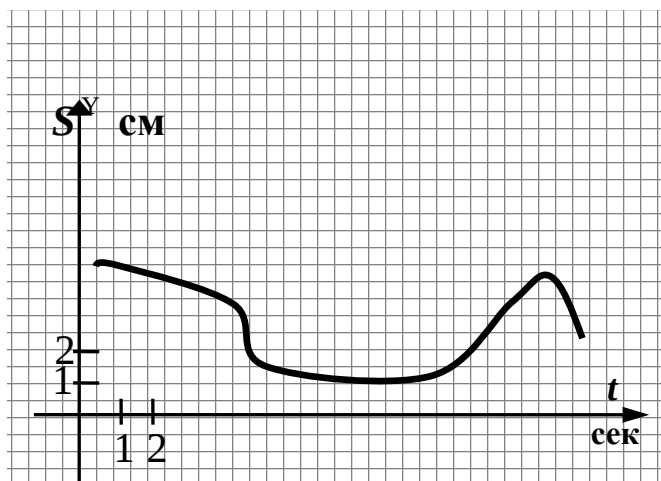
- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot \operatorname{tg}^2(3x)}{\arcsin(3x) \cdot \cos(5x)} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + \sqrt[3]{x^7 + 5x - 1}}{2x - 3x^2 + 4x^3} \right)$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+7} - 3} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{5x-4}$.

- 2) Исследовать на разрывы функцию
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{при } x \leq -1 \\ 2x^2 - 4 & \text{при } -1 < x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{3-3x} & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

построить её график.

6.6 ТР №5 Производная функции одной переменной

№1 Зависимость от времени t (сек) расстояния S (см) от прямолинейно перемещающейся точки до начала координат задано графически. Из геометрического и физического смысла производной найти скорость точки через 2, 8, 10, 14 сек. от начала движения с указанием единиц измерения и расстояния до начала координат; Указать при этом знак второй производной



№2 Найти производные функций

$$1) f(x) = 4\sin^5(3x^2) - 2 \cdot \sqrt[3]{tg(7x)} + \frac{5}{\arcsin(e^{-5x})};$$

$$2) S(t) = (2t - 3\cos^3(t^4 + 1))^{10};$$

$$3) x(p) = \frac{p^2 - 3p}{3 - 2p} \quad \text{при } p=0.$$

№3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$R(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1 \quad \text{при } x \in [-4; 5].$$

№4 Провести полное исследование функции и построить её график

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}; \quad 2) S(t) = (t - 1) \cdot e^{-2t}.$$

6.7 ТР №6 Интегрирование

$$1) \text{ Найти интегралы а) } \int (x^2 - 2x + 1) \cdot (\cos(2x) - 3e^{-x}) dx; \quad б) \int \frac{x^5 - 3x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 - 7x} dx;$$

$$в) \int \sin^3(2x) \cdot \cos^5(2x) dx; \quad г) \int \frac{\sqrt{2x+1}}{1 - \sqrt[3]{2x-1}} dx;$$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$а) y = (x-1)^3 \text{ и } y = x-1; \quad б) \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 4\sin(t) \end{cases}, y \geq 2; \quad в) \rho(\varphi) = \cos(3\varphi);$$

3) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$ и $x = 2$.

6.8 ТР №7 Числовые и функциональные ряды

- 1) Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{3x-2}{x^3+2x^2+x} dx$;
- 2) Исследовать числовой ряд на сходимость. Для знакопеременных рядов исследовать также абсолютную сходимость
- 2.а) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{8}{12} + \frac{11}{24} + \frac{14}{48} + \frac{17}{96} + \dots$; 2.б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-1}{n^3+2n}$; 2.3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n!}$.
- 3) Найти интервал и область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2}{n+1} \cdot (x+4)^n;$$

- 4) Записать разложение функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки $x = x_0$ и найти область сходимости полученного ряда

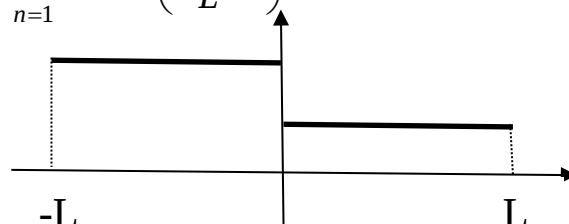
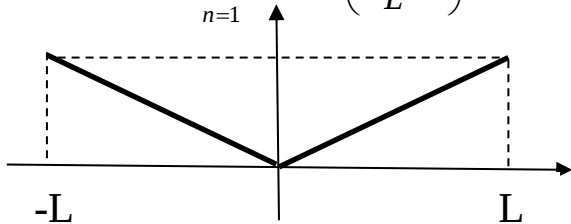
4.а) $f(x) = 2e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 4.б) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 1$.

6.9 АКР №3 Ряд Фурье

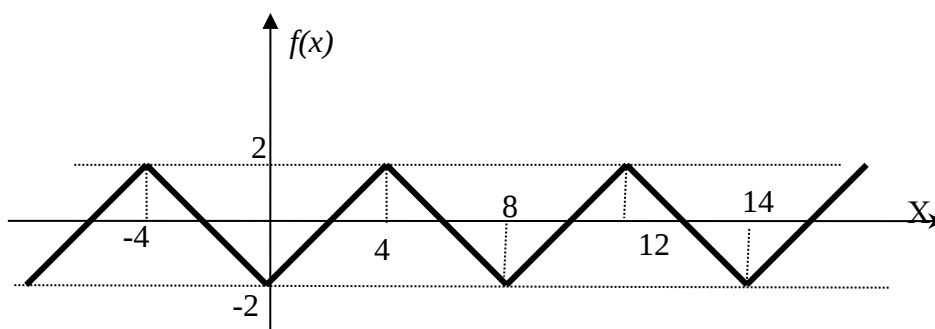
№1 Для каждой заданной графически функции указать, какой из случаев является верным (с пояснением)

а) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L} x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} x\right) \right)$; б) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} x\right)$;

в) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L} x\right)$; г) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} x\right)$



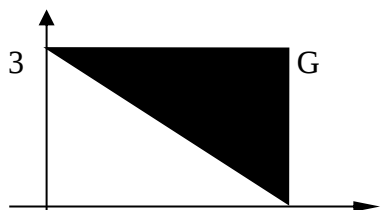
№2 Записать разложение в ряд Фурье функции, заданной графиком



6.10 ТР №8 Функции нескольких переменных

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x; y) = x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 3y$$



а) в точках области G ;

б) при условиях $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ y \geq x^2 + 1 \end{cases}$;

6.11 ТР №9 Дифференциальные уравнения первого порядка

Для каждого дифференциального уравнения

а) Определить его вид; б) Найти общее решение (общий интеграл);

в) При указанных начальных условиях решить задачу Коши

1) $x \cdot y' - 2y = 1, \quad y(1) = 1;$

2) $(p^2 + 1) \cdot \sqrt{s} \cdot ds + p \cdot s \cdot dp = 0 ;$

3) $(x - y) \cdot dx + (2y - x) \cdot dy = 0, \quad y = 1 \text{ при } x = 1;$

6.12 АКР №4 Метод Эйлера решения линейных однородных ДУ

Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений и выделить частное решение, если указаны начальные условия

1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0;$

2) $\frac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \frac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, \quad s(0) = 1, \quad s'(0) = 0;$

3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

6.13 ТР №10 Линейные неоднородные диф. уравнения

При начальных условиях $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$ найти решение

уравнения $A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = f(x)$

$A = 2, \quad B = -1, \quad C = -1, \quad f(x) = 10e^{2x} - 7 \sin(x) - \cos(x) + 2x, \quad y_0 = 5, \quad y'_0 = 4,5.$

6.14 АКР №5 Системы дифференциальных уравнений

Дана система дифференциальных уравнений

- 1) Методом исключения найти общее решение системы;
- 2) Записать общее решение системы в векторном виде;
- 3) Указать собственные числа и собственные векторы;
- 4) Изобразить эскиз интегральных кривых такой системы в окрестности точки покоя $O(0; 0)$ и исследовать такую точку на устойчивость;
- 5) Из общего решения системы выделить частное решение системы при указанных начальных условиях.

$$\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}, \quad x=1 \quad y=-6 \quad \text{при} \quad t=0.$$

7 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ АТТЕСТАЦИИ ПО СЕМЕСТРОВЫМ ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В каждом семестре студент выполняет аудиторные и домашние контрольные работы (АКР и ТР), сроки их выполнения указаны в таблицах пунктов 4.1, 4.2, 4.3 и содержание указано в п. 6. Их выполнение позволяет набрать текущий рейтинг до 50 баллов, допуском к экзамену является 35 баллов. Экзаменационный билет содержит два теоретических и 3 задачи, каждое из этих пяти заданий оценивается по 10 баллов.

Пример билета экзаменационного билета за 1 семестр

- 1) Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц и свойства таких действий.

Задача: Вычислить $A \cdot (2B - C^T)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- 2) Парабола: определение, каноническое уравнение и уравнение со сдвигом вершины, свойства, построение.

Задача: Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой $x=1$ и точки $F(-5; 2)$. Построить эту линию.

- 3) В пирамиде ABCD с вершинами $A=(-4; 2; 6)$, $B=(2; -3; 0)$, $C=(-10; 5; 8)$, $D=(-5; 2; -4)$ найти уравнение плоскости, проходящей через D параллельно плоскости ABC.

Оценка с учётом суммарно набранных баллов выставляется по таблице

Оценка по 5 бальной шкале	Зачет	Сумма баллов по дисциплине	Оценка (ECTS)	Градация
5 (отлично)	Зачтено	90-100	A	Отлично
4 (хорошо)		85-89	B	Очень хорошо
		75-84	C	Хорошо
		70-74	D	Удовлетворительно
		65-69		
3 (удовлетворительно)		60-64	E	Посредственно
2 (неудовлетворительно)	Не зачтено	Ниже 60	F	Неудовлетворительно

8 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

а) Основная литература:

1. **517 (075) Б 90 Бугров Я. С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : [учеб. пособие : в 3 т.] / Я. С. Бугров, С. М. Никольский ; под ред. В. А. Садовниченко. - 6-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2004. - 288 с. : ил. - (Высшее образование, Современный учебник). - Предм. указ.: с. 282. - Рек. М-вом образования РФ для вузов. - ISBN 5-7107-8421-4 (т. 1) : 123-75. - ISBN 5-7107-8420-6.
Кол-во экземпляров: всего – 25
2. **517(075) Б 50 Бермант А. Ф.** Краткий курс математического анализа : учеб. для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - 10-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар : Лань, 2003. - 736 с. - (Учебники для вузов, Специальная литература). - Библиогр.: с. 736. - ISBN 5-8114-0499-9 : 280-00.
Кол-во экземпляров: всего – 30
3. **517(075) Д 17 Данко П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003. - 416 с. : ил. - С решениями. - ISBN 5-329-00528-0 : 72-00. - ISBN 5-94666-009-8 : 65-00. - ISBN 5-329-00327-X.
Кол-во экземпляров: всего – 52
4. **517 Ш 63 Шипачев В. С.** Высшая математика : [учеб. пособие для вузов] / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2006. - 479 с. : ил. - Предм. указ.: с. 449-454. - Рек. М-вом образования РФ для вузов. - ISBN 5-06-003959-5 : 264-00.
Кол-во экземпляров: всего - 15
5. **517 З-17 Зайцев И. А.** Высшая математика : [учеб. пособие] / И. А. Зайцев. - 4-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2005. - 398 с. : ил. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 392. - Рек. М-вом образования РФ для с.-х. вузов. - ISBN 5-7107-9071-0 : 146-85.
Кол-во экземпляров: всего - 25
6. **519(075) Г 55 Гмурман В. Е.**
Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. - 9-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2003. - 479 с. - Предм. указ.: с. 474-479. - Рек. М-вом образования РФ для вузов. - ISBN 5-06-004214-6 : 109-00.
Кол-во экземпляров: всего – 30

б) Дополнительная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1998 – 320 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах. Ч.1, 2. – М.: Высшая школа, 1986 – 304, 416 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов, т.1, 2. – Наука, 1978 – 560 с.
4. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998 – 479с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для экономических специальностей ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1986.
7. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис, 1998 – 288с.

в) Информационное обеспечение (электронные документы)

1. Орлов Ю.В. «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
учебное пособие
часть 1 «Матричное исчисление. Решение систем линейных уравнений» 64 с.
часть 2 «Векторное исчисление» 72 с. – Новоуральск, изд. НГТИ 2003.
2. Орлов Ю.В. Производная функции одной переменной
Учебно – методическое пособие – Новоуральск, НПИ МИФИ 2001.
3. Орлов Ю.В. «Интегрирование». Учебно – справочное пособие по курсу «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» для студентов всех специальностей заочной формы обучения. Новоуральск, изд. НГТИ, 2007 – 32 с.
4. Орлов Ю.В. «РЯДЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»
Учебно – справочное пособие по курсу «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»
для студентов всех специальностей заочной формы обучения
Новоуральск, изд. НГТИ. – 40 с.
5. Орлов Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно – методическое пособие по курсу «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» для студентов всех специальностей всех форм обучения. Новоуральск, изд. НГТИ, 2004.– 60 с.

9 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебная дисциплина обеспечена учебно-методической документацией и материалами. Её содержание представлено в локальной сети учебного заведения и находится в режиме свободного доступа для студентов. Доступ студентов для самостоятельной подготовки осуществляется через компьютеры дисплейного класса (в стандартной комплектации).

Приложение

Фонд оценочных средств

по дисциплине

Математика

Содержание:

№	Содержание	Стр.
1	1 семестр	
	1.1 Контрольная работа по теме «Матрицы. Векторы»	4
	1.2 Контрольная работа по теме «Линии и поверхности»	6
	1.3 Вопросы экзамена по 1-му семестру	8
	1.4 Пример экзаменационного билета по 1-му семестру	10
2	2 семестр	
	2.1 Контрольная работа 2.1	11
	2.2 Контрольная работа 2.2	13
	2.3 Вопросы экзамена по 2-му семестру	14
	2.4 Пример экзаменационного билета по 2-му семестру	17
3	3 семестр	
	3.1 Контрольная работа 3.1	18
	3.2 Контрольная работа 3.2	19
	3.3 Вопросы экзамена по 3-му семестру	21
	3.4 Пример экзаменационного билета по 3-му семестру	24

1-й семестр

Контрольная работа №1.1 по темам «Матрицы. Векторы»
выдаётся на 2 неделе, сдача на 10 неделе 1-го семестра

№1(3 балла) Для матриц A, B, C (см. таблицу) найти $2 \cdot A^T - B \cdot C$

1 вариант $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}:$

2 вариант $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

№2 (9 баллов) Найти решение системы

1) Методом Крамера; 2) Методом Гаусса или Жордана-Гаусса.

3) Матричным методом (проверив A^{-1} умножением на A);

1 вариант
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -9 \\ 4x + 2z + 5y = -32 \\ 3x - 19 - 4y = 3z \end{cases}$$

2 вариант
$$\begin{cases} -2x + 2y + 4z = -10 \\ 4x + 2y + 3z = 5 \\ 3z - 2y + 19 = 2x \end{cases}$$

№3(3 балла) Система трех уравнений от четырех неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 в матричном виде имеет вид $A \cdot X = B$, матрицы A и B заданы.

Записать эту систему, найти её общее решение.

1 вариант $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -9 \\ 5 & 4 & -6 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix};$

2 вариант $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$

№4(5 баллов) В базисе $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ с модулями векторов $|\vec{e}_1|, |\vec{e}_2|$ и углом между ними $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \varphi$ заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos(\vec{a}, \vec{b}), \vec{a} \cdot \vec{b}, |\vec{a} \times \vec{b}|$

1 вариант $|\vec{e}_1| = 4, |\vec{e}_2| = 7, \varphi = 30^\circ, \vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{b} = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

2 вариант $|\vec{e}_1| = 4, |\vec{e}_2| = 5, \varphi = 60^\circ, \vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{b} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

№5 (10 баллов) Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (см. таблицу).

Найти для них

1) $(\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}) + 3 \cdot (\vec{b} - 2 \cdot \vec{c})$;

2) $(\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} - 3 \cdot \vec{b})$;

3) Косинусы углов и углы между а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$, в) $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{b}$;

5) Площадь треугольника построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

6) Смешанное произведение $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$;

7) Объём пирамиды построенной на $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$;

8) Разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если они образуют базис.

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	$\vec{a} = (1; -5; -1)$	$\vec{b} = (5; -4; 2)$	$\vec{c} = (2; 3; 4)$	$\vec{d} = (3; 18; 23)$
2	$\vec{a} = (1; -1; 1)$	$\vec{b} = (1; 2; 2)$	$\vec{c} = (2; 3; -2)$	$\vec{d} = (1; 0; 5)$

Контрольная работа №1.2 по теме «Линии и поверхности»
выдаётся на 15 неделе, сдача на 18 неделе 1-го семестра

№6(4 балла) Дана система трёх линейных неравенств с двумя переменными. Построить на плоскости xOy область, заданную системой неравенств. Для полученной области (треугольника) **найти**

- 1) Координаты всех вершин;
- 2) Один из внутренних углов;
- 3) Длину одного основания и высоты к такому основанию;
- 4) Площадь треугольника по основанию и высоте;
- 5) Площадь треугольника через векторное произведение;
- 6) Уравнения двух медиан;
- 7) Точку пересечения медиан (двумя способами).

$$\begin{array}{l}
 \text{1 Вариант} \left\{ \begin{array}{l} 26x - 2y - 69 \leq 0 \\ 2x + 4y - 24 \leq 0 \\ 14x + y - 33 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{2 Вариант} \left\{ \begin{array}{l} 4x - 28y + 18 \geq 0 \\ 10x + 28y - 102 \leq 0 \\ 6x + 7y - 22 \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

№7(6 баллов) Даны четыре точки пространства:

$$A = (x_1; y_1; z_1), B = (x_2; y_2; z_2), C = (x_3; y_3; z_3), D = (x_4; y_4; z_4).$$

В пирамиде $ABCD$ **найти**

- 1) Общее уравнение грани ABC ;
 - 2) Уравнение грани ABC в отрезках;
 - 3) Уравнение плоскости, проходящей через D параллельно грани ABC ;
 - 4) Угол между рёбрами AB и BC ;
 - 5) Величину двугранного угла при ребре BC ;
 - 6) Угол между ребром AB и гранью BCD ;
 - 7) Каноническое и параметрическое уравнения ребра AB ;
 - 8) Длину ребра AB ;
 - 9) Длину высоты, опущенной из вершины D на плоскость ABC ;
 - 11) Площадь грани ABC ;
 - 12) Объём пирамиды по высоте и площади основания;
 - 13) Объём пирамиды с помощью смешанного произведения;
- (Вычисления производить с округлением до двух знаков после запятой, углы находить в градусах.)

Вар	Точки			
	A	B	C	D
1	A= (1 ; 3 ; 6)	B=(2; 2; 1)	C=(-1; 0; 1)	D=(-4; 6; -3)
2	A= (-4 ; 2 ; 6)	B=(2;-3; 0)	C=(-10; 5; 8)	D=(-5; 2; -4)

№8(2 балла)Изобразить кривую, заданную уравнением. Определить для кривой полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет, координаты центра и фокусов

1 вариант $\frac{1}{9} \cdot x^2 - \frac{1}{16} \cdot (y - 2)^2 = 1;$

2 вариант $\frac{1}{9} \cdot (x + 3)^2 + \frac{1}{16} \cdot (y - 2)^2 = 1.$

№9 (3 балла) Привести уравнение кривой к каноническому виду.

Построить линию, заданную уравнением

1 вариант $-98 - 8x^2 + 16x - 18y^2 + 108y = 0;$

2 вариант $25x^2 - 200x + 316 + 4y^2 - 16y = 0.$

1.3 ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНА по 1-му семестру

1. Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц.
2. Определители второго и третьего порядка: определение, правило вычисления и основные свойства. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента, раскрытие определителя по строке или столбцу.
3. Общее определение определителя n -го порядка. Задача о расстановке ладей на шахматной доске. Вычисление определителя четвертого порядка.
4. Обратная матрица: определение, теорема о существовании обратной матрицы (способ нахождения A^{-1}), проверка полученного результата.
5. Система линейных уравнений, определение ее решения. Метод Крамера нахождения решений линейной системы. Теорема Крамера. Матричная запись линейной системы. Матричный метод нахождения решения линейной системы.
6. Метод Гаусса и Жордана-Гаусса решения линейной системы. Случаи единственного решения, множества решений и отсутствия решений.
7. Однородная линейная система, существование ее нетривиального решения, базисные и свободные переменные при этом.
8. Скалярные и векторные величины. Способы задания векторов. Действия над векторами (графически): сравнение, умножение на число, сумма и разность. Основные свойства действий над векторами.
9. Линейная зависимость системы векторов. Размерность векторного пространства (прямой, плоскости, пространства). Афинный базис, афинные координаты вектора, нахождение их геометрически.
10. Скалярное произведение векторов: определение, основные свойства. Косинус угла между векторами. Модуль вектора. Проекция вектора на ось.
11. Декартова система координат, базисные векторы. Декартовы координаты вектора, запись вектора через базисные. Связь точек и векторов. Сравнение, умножение на число, сумма, разность векторов в координатной форме.
12. Скалярное произведение векторов в декартовых координатах. Модуль вектора, расстояние между точками и угол между векторами в координатной форме.
13. Правая тройка векторов. Векторное произведение: определение и основные свойства, геометрический смысл, синус угла между векторами.
14. Векторное произведение двух векторов в координатной форме. Площадь треугольника, заданного координатами вершин с помощью векторного произведения.
15. Смешанное произведение: определение, основные свойства и правило вычисления в координатной форме, геометрический смысл, проверка линейной зависимости.

16. Способы задания линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве по Декарту и Жордану. Полярная система координат.
17. Уравнения прямой на плоскости: векторное, параметрическое, через две точки, каноническое, с угловым коэффициентом, общее, в отрезках и нормальное. Связь направляющего и нормального векторов прямой.
18. Взаимное расположение двух прямых на плоскости (по уравнениям), параллельность, перпендикулярность, точка пересечения. Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми. Проекция точки на прямую.
19. Уравнения плоскости в пространстве: векторное, параметрическое, через три точки (точку и два направляющих вектора), общее в отрезках и нормальное.
20. Связь нормального и направляющих векторов плоскости. Взаимное расположение плоскостей (параллельность, совпадение, пересечение, перпендикулярность) по уравнениям. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями.
21. Уравнения прямой в пространстве: векторное, параметрическое, по двум точкам, каноническое, общее, через проектирующие плоскости.
22. Взаимное расположение прямой и плоскости: параллельность, пересечение, перпендикулярность, проекция точки на плоскость, симметрия точки относительно плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
23. Взаимное расположение двух прямых в пространстве по уравнениям: пересечение (точка пересечения), параллельность (расстояние), скрещивание (наименьшее расстояние).
24. Эллипс: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
25. Гипербола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
26. Парабола: определение, каноническое уравнение, свойства, построение.
27. Общее уравнение линии второго порядка, приведение к каноническому уравнению по общему (при отсутствии $xу$) выделением полных квадратов.
28. Директориальное свойство эллипса и гиперболы, правило нахождения их канонического уравнения.
29. Нахождение уравнения окружности по трем точкам.
30. Классификация линий второго порядка на плоскости. Цилиндрические и конические сечения.
31. Канонические уравнения и эскизы поверхностей второго порядка: эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов.
32. Линейчатые поверхности (гиперболоид и параболоид). Цилиндрические и конические поверхности. Классификация поверхностей второго порядка.
33. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимнообратных функций. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.

34. Преобразования, влияющие на график функции $(f(x)+c, f(x+c), c \cdot f(x), f(cx), |f(x)|, f(|x-c|))$. Графики линейной, параболической, дробно-линейной функции и $y=A \cdot \sin(wx+w_0)$.

1.4 ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА по 1-му семестру

НТИ НИЯУ МИФИ

Кафедра общенаучных дисциплин

Экзаменационный билет №1

по предмету МАТЕМАТИКА, 1 СЕМЕСТР

1) Определение матриц, их сравнение, транспонирование, умножение на число, сумма и разность, произведение матриц и свойства таких действий.

Задача: Вычислить $A \cdot (2B - C^T)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Парабола: определение, каноническое уравнение и уравнение со сдвигом вершины, свойства, построение.

Задача: Найти уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой $x=1$ и точки $F(-5;1)$. Построить эту линию.

3) В пирамиде ABCD с вершинами $A=(-4; 2; 6)$, $B=(2; -3; 0)$, $C=(-10; 5; 8)$, $D=(-5; 2; -4)$ найти уравнение плоскости, проходящей через D параллельно плоскости ABC.

Составил: _____ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: _____ Носырев Н.А.

Новоуральск 2023

2-й семестр

Контрольная работа 2.1 выдаётся на 2 неделе, сдача на 13 неделе 2 семестра

Вариант №1

№1 Вычислить пределы

1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 - 4x^2 + 3x}$ при $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot (\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 + 1}) \right)$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{3x}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{2}{x+1} & \text{при } -1 < x < 0 \\ 3 \sin(2x) & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов). Построить график.

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{\lg^3 2x \cdot (2x-1)^3}{\sqrt{1-x}};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t=1$

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 + t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x) = (x^3 - 2)^{x-1}$; б) $x^3 - 3xy + 2y^3 + 2y + 1 = 0$;

4. Вычислить приближенно

$$\lg(99);$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x) = \frac{x+1}{x+3}$; б) $s(t) = (2t+3) \cdot e^{-2(t+1)}$.

Вариант №2

№1 Вычислить пределы

1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ при $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x) - \sin(3)}{6 - 2x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{x^2}$.

№2 Найти область определения функции $y=f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{при } x \leq -3 \\ \frac{1}{2x+6} & \text{при } -3 < x < 0 \\ (x-3)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов). Построить график.

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{(x^3 + 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2)}{\ln 3x};$$

2. Найти y'_x и y''_{xx} при $t = 2$

$$\begin{cases} x = 3 - 4t^3 \\ y = e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а) $f(x) = (1 - 2x^3)^{\sin x + 1}$; б) $\sin(2x) - x \cdot y^3 + 3y + 3 = 0$;

4. Вычислить приближенно

$$(1,95)^{10};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а) $y(x) = \frac{2 - x^2}{x + 4}$; б) $s(p) = \frac{e^{2(p+1)}}{2(p+1)}$.

№4 (5 баллов) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1. $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8.$

2. $y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 3).$

3. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

4. $y = \sin x \cos^2 x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$

5. $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$

№5 (5 баллов) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1.
$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 (y \geq 2). \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

№6 (5 баллов) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в полярной системе координат

Вариант 1 $\rho(\varphi) = 4 \cos(3\varphi), \rho = 2 (\rho \geq 2);$

Вариант 2 $\rho(\varphi) = \sin(2\varphi).$

№7 (5 баллов) Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной графиком функции.

Вариант №1 $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0;$

Вариант №2 $2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0.$

2.3 Вопросы экзамена по 2-му семестру

1. Определение числовой последовательности и ее предела. Свойства пределов последовательности.
2. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимнообратных функций. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.
3. Преобразования, влияющие на график функции ($f(x)+c$, $f(x+c)$, $cf(x)$, $f(cx)$, $|f(x)|$, $f(|x-c|)$). Графики линейной, параболической, дробно-линейной функции и $y=A\sin(wx+w_0)$.
4. Определение предела функции в точке. Бесконечный предел и предел на бесконечности. Свойства пределов.
5. Бесконечно малая функция (БМ). Сравнение БМ: эквивалентность, символ "о". Первый замечательный предел, его применение. Основные эквивалентности БМ в пределах.
6. Бесконечно большая функция (ББ). Сравнение ББ: эквивалентность, символ "о". Шкала ББ при $x \rightarrow \infty$, её применение.
7. Связь БМ, ББ и других функций. Основные виды неопределенностей в пределах, способы их раскрытия. Второй замечательный предел, правило его применения.
8. Непрерывность функции в точке. Частичные пределы, их связь с непрерывностью. Точки разрыва функции, их классификация.
9. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства непрерывных в точке функций.
10. Свойства непрерывных на отрезке функций: сохранение знака, ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, поиск корня $f(x)=0$ методом половинного деления, промежуточные значения.
11. Производная функции $f(x)$: определение, геометрический смысл с уравнением касательной и нормали, физический смысл. Свойства производных.
12. Производные основных функций (x^n , a^n , $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$) с доказательствами.
13. Приращение дифференцируемой функции, понятие дифференциала и его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы дифференциала, его применение в приближенных вычислениях.
14. Производная обратной функции. Вывести производные $\arcsin(x)$, $\arctg(x)$. Производная неявно заданной функции.
15. Логарифмическое дифференцирование. Понятие гиперболических функций, их производные.

16. Свойства дифференцируемых на отрезке функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
17. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, её коэффициенты и остаточный член в формах Пеано и Лагранжа.
18. вывести разложения $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^n$ по формуле Маклорена.
19. Производные $y'_x(x)$, $y''_{xx}(x)$ для функции, заданной параметрически.
20. Определение точки экстремума. Связь монотонности функции и знака ее производной. Теорема Ферма (необходимое условие точек экстремума).
Достаточные условия экстремума:
 - а) с помощью знака первой производной;
 - б) с помощью производных старших порядков.
21. Алгоритм нахождения точек экстремума. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, примеры задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.
22. Определение выпуклой (вогнутой) НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ. Связь выпуклости со знаком второй производной. Алгоритм нахождения точек перегиба.
23. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределах.
24. Понятие асимптоты графика функций, их виды и способы нахождения.
25. Общий план исследования функций и построения графика функции.
26. Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на ОТРЕЗКЕ.
27. Решение текстовых задач на оптимизацию.
28. Определение первообразной для $f(x)$ на $[a; b]$, теорема о двух первообразных. Неопределенный интеграл (НИ), его свойства. Таблица основных интегралов.
29. Определенный интеграл (ОИ) для $f(x)$, как предел интегральных сумм, его основные свойства, теорема о среднем.
30. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной.
31. Формула Ньютона-Лейбница и её применение.
32. Замена переменной в НИ и ОИ. Интегрирование по частям в НИ, ОИ, основные случаи.
33. Вычисление некоторых НИ методом неопределенных коэффициентов.
34. Дробно-рациональная функция, алгоритм ее разложения на сумму элементарных дробей:
 - а) выделение целой части, алгоритм "деление столбиком";
 - б) разложение многочлена на неприводимые множители, кратность корня;

в) метод неопределенных коэффициентов разложения на элементарные дроби.

35. Интегралы от элементарных дробей. Общий план интегрирования дробно-рациональных функций.

36. Интегралы от тригонометрических функций; Основные случаи и способы интегрирования данных интегралов.

37. Интегралы от иррациональных функций. Примеры "неберущихся" интегралов.

38. Нахождение площади криволинейной трапеции и площадей плоских фигур с помощью ОИ (ограниченных $y_i = f_i(x)$; параметрически заданными).

39. Площадь криволинейного сектора. Нахождение площади фигуры в полярных координатах.

40. Объем тела по поперечным сечениям. Объем тела вращения с помощью ОИ.

Экзаменационный билет №1

по курсу «Математика» 2 семестр

1) Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot \sin^2(3x)}{\arcsin(2x) \cdot (1 - \cos(x))} \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-4}{x+7} \right)^{5x^2-x}.$$

2) Найти производные функций

$$\text{а) } S(p) = p^2 \cdot e^{3p-1}; \quad \text{б) } x(y) = \frac{y^3}{3y-12} + \ln(3 + \sqrt{2});$$

3) Исследовать на асимптоты график функции $f(x) = \frac{x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{x^2 - 9};$

4) Найти $\int \frac{2x-1}{x^2+4x-12} dx;$

5) Вычислить площадь, ограниченную кривой $\rho(\varphi) = 4 \sin^2(\varphi).$

Составил: _____ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: _____ Носырев Н.А.

Новоуральск 2023

3 семестр

Контрольная работа 3.1 по теме «Несобственные интегралы. Ряды»
выдаётся на 2 неделе, сдача на 9 неделе 3-го семестра

№1 (5 баллов) Исследовать на сходимость несобственные интегралы

Вар. №1 1) $\int_1^{\infty} \frac{\cos^2(3x)}{3x^3 - 4x^2 + 4x} dx$; 2) $\int_2^{+\infty} \frac{3}{x \cdot \ln^3(x)} dx$; 3) $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4x} dx$.

Вар. №2 1) $\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^4 + 4} dx$; 2) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x \cdot \sqrt{1 + \ln(x)}} dx$; 3) $\int_1^3 \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-1}} dx$.

№2 (5 баллов) Исследовать числовой ряд на сходимость.

Для знакопеременных рядов исследовать также абсолютную сходимость

Вариант №1

1) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{8}{12} + \frac{11}{24} + \frac{14}{48} + \frac{17}{96} + \dots$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^3 + 2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n!}$.

Вариант №2

1) $\frac{2}{3} - \frac{3}{6} + \frac{4}{12} - \frac{5}{24} + \frac{6}{48} - \frac{7}{96} + \dots$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n^3 + 2n}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{\log_4(n+1)}$.

№3 (3 балла) Найти интервал и область сходимости степенного ряда

Вариант №1 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2}{n+1} \cdot (x+4)^n$; Вариант №2 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x+5)^n$;

№4 (3 балла) Записать разложение функции $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки $x = x_0$ и найти область сходимости полученного ряда

Вариант №1 1) $f(x) = 2e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x_0 = 1$;

Вариант №2 1) $f(x) = 2 \sin(5x)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$, $x_0 = 2$.

Контрольная работа 3.2 по теме
«Дифференциальные уравнения и их системы»
выдаётся на 8 неделе, сдача на 18 неделе 3-го семестра

№5 (6 баллов) Для каждого дифференциального уравнения

- а) Определить его вид;
- б) Найти общее решение (общий интеграл);
- в) При указанных начальных условиях решить задачу Коши

Вариант №1

- 1) $x \cdot y' - 2y = 1, y(1)=1;$
- 2) $(p^2 + 1) \cdot \sqrt{s} \cdot ds + p \cdot s \cdot dp = 0 ;$
- 3) $(x - y) \cdot dx + (2y - x) \cdot dy = 0, y=1 \text{ при } x=1;$

Вариант №2

- 1) $(x - y) \cdot dx + (y + x) \cdot dy = 0, y=1 \text{ при } x=1;$
- 2) $2q \cdot (p + 1) \cdot dq + p \cdot \sqrt{q} \cdot dp = 0, p=1 \text{ при } q=4;$
- 3) $x \cdot y' - 4y = x^3$

№6 (6 баллов) Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений и выделить частное решение, если указаны начальные условия

Вариант №1

- 1) $y^{(4)} - 4y''' - 5y'' = 0;$
- 2) $\frac{d^2 s}{dt^2} + 6 \cdot \frac{ds}{dt} + 8 \cdot s(t) = 0, s(0) = 1, s'(0) = 0;$
- 3) $y''' + 8y'' + 25y' = 0.$

Вариант №2

- 1) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0;$
- 2) $\frac{d^3 p}{dt^3} + 3 \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} - 18 \cdot \frac{dp}{dt} = 0, p(0) = 1, p'(0) = 0;$
- 3) $y'' + 8y' + 41y = 0.$

№7 (8 баллов) При начальных условиях $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$ найти решение уравнения $A \cdot y'' + B \cdot y' + C \cdot y = f(x)$

Вар.	Нач. условие		Коэффициенты ЛОДУ			Неоднородность $f(x)$
	y_0	y'_0	A	B	C	
1	5	4,5	2	-1	-1	$10e^x - 7 \sin(x) + \cos(x) + 2x$
2	0	19	2	16	50	$90e^{2x} + 64 \sin(x) - 32 \cos(x) - 100x + 118$

№8 (4 балла) Дана система дифференциальных уравнений.

- 6) Найти методом исключения общее решение системы;
- 7) Записать общее решение системы в векторном виде;
- 8) Найти собственные числа и собственные векторы;
- 9) Изобразить эскиз интегральных кривых исходной системы в окрестности точки $O(0; 0)$ и исследовать такую точку на устойчивость;
- 10) Из общего решения системы выделить частное решение системы при указанных начальных условиях.

Вариант №1 $\begin{cases} x'(t) = 9 \cdot x + y \\ y'(t) = -78 \cdot x - 10 \cdot y \end{cases}, x=1, y=-6 \text{ при } t=0.$

Вариант №2 $\begin{cases} x'(t) = x + y \\ y'(t) = -2 \cdot x + 4 \cdot y \end{cases}, x=-6, y=-6 \text{ при } t=0.$

3.2 Вопросы экзамена по 3-му семестру

1. Несобственный интеграл 1 рода, определение и критерии его сходимости.
2. Несобственный интеграл II рода, определение и критерии его сходимости.
3. Определение числового ряда, его частичных сумм и суммы, сходимости и расходимости. Сходимость геометрической прогрессии, ее сумма.
4. Признаки сходимости числового ряда: необходимый, сравнения и эквивалентности, интегральный и сходимость $\sum \frac{1}{n^p}$, Даламбера и Коши.
5. Знакопеременный и знакочередующийся ряды. Теорема Лейбница (признак Лейбница) о сходимости знакочередующегося ряда и оценке его суммы.
6. Функциональный ряд, определение его области сходимости. Степенной ряд. Теорема Абеля, интервал и радиус сходимости степенного ряда.
7. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда, вычисление суммы степенного ряда сведением к геометрической прогрессии (или другому ряду).
8. Ряды Тейлора и Маклорена, их коэффициенты. Разложение в степенной ряд $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , $\ln(1+x)$ и др.
9. Приближенные вычисления чисел e и π , вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.
10. Область нескольких переменных, окрестность точки. Открытая и замкнутая области нескольких переменных. Функции нескольких переменных (ФНП): определение, способы задания. Геометрический смысл $Z=f(x,y)$, линии уровня.
11. Предел ФНП в точке. Непрерывность ФНП в точке. Основные свойства непрерывных ФНП.
12. Определение частной производной ФНП, правила их вычисления. Геометрический смысл частных производных для $Z=f(x,y)$. Уравнение касательной плоскости и нормали.
13. Полный дифференциал ФНП, связь с Δf , инвариантность его формы. Полная производная по переменной t . Производная неявной функции.
14. Производная по направлению. Градиент функции: определение, правила вычисления, связь с производной по направлению и с линией (поверхностью) уровня.
15. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных ФНП. Дифференциалы высших порядков для ФНП, их коэффициенты для $f(x, y)$ (треугольник Паскаля и бином Ньютона). Формула Тейлора для ФНП. Приближенные вычисления.

16. Точки экстремума ФНП. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума в общем виде и для $f(x, y)$, характер экстремума.
17. Условный экстремум ФНП. Метод множителей Лагранжа и метод подстановки.
18. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой ограниченной области (план).
19. Общие понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ): ДУ, его решение, общее и частное решения, начальные и краевые условия, интегральная кривая, задача Коши. Теорема Коши для ДУ первого порядка.
20. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными, их решения. Сведение текстовой задачи к решению ДУ на примере задачи о распаде радия и о непрерывном растворении соли (или другой задачи).
21. Однородные функции двух переменных. Общий вид и правило интегрирования однородных диф. уравнений. Уравнения, приводящиеся к однородным, их интегрирование.
22. Линейные ДУ первого порядка, методы Бернулли и Лагранжа для их интегрирования.
23. Уравнение Бернулли, его интегрирование непосредственно и сведением к линейному ДУ.
24. Уравнение в полных дифференциалах: общий вид, правило интегрирования и физический смысл (потенциальность плоского векторного поля).
25. Методы Эйлера и изоклин приближенного построения интегральных кривых.
26. Решение ДУ в виде степенного ряда, два способа нахождения его коэффициентов;
27. ДУ второго порядка. Случаи ДУ, допускающих понижение порядка.
28. Линейное ДУ второго порядка: общий вид, свойства решений, структура общего решения.
29. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского. Теорема о связи определителя Вронского с линейной зависимостью решений линейного однородного ДУ. Фундаментальная система решений и общее решение при этом.
30. Линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами: общий вид, метод Эйлера его решения, характеристическое уравнение. Общее решение линейного ДУ при известных корнях характеристического уравнения:
 - а) корни действительные, различные;
 - б) корни кратные;
 - в) корни комплексные, сопряженные.
31. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ при неоднородности специального вида (метод подбора):

а) $P_n(x)$; б) $P_n(x) \cdot e^{ax}$; в) $e^{ax} \cdot (A \cos(bx) + B \sin(bx))$; г) Сумма функций.

Нахождение коэффициентов предполагаемого решения.

32. Нахождение частного решения линейного неоднородного ДУ методом вариации постоянных.
33. ДУ, описывающее механические колебания. Случаи свободных, затухающих, вынужденных колебаний. Случай резонанса.
34. Каноническая и нормальная формы системы ДУ. Решение системы ДУ, общее и частное решения. Начальные условия. Теорема о существовании и единственности решения системы ДУ.
35. Сведение ДУ к системе ДУ в нормальной форме, системы ДУ к одному дифференциальному уравнению (метод исключения).
36. Системы линейных уравнений, свойства решений однородных систем и неоднородных систем ДУ. Определитель Вронского системы ДУ, его свойства. ФСР системы ЛОДУ.
37. Нахождение решений линейной однородной системы методом исключения.
38. Нахождение решений линейной однородной системы с помощью собственных векторов.
39. Нахождение решений линейной неоднородной однородной системы методом вариации постоянных.

3.3 ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА ПО 3-му семестру

НТИ НИЯУ МИФИ

Кафедра общенаучных дисциплин

Экзаменационный билет №1

по курсу «Математика» 3 семестр

№1 Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{\infty} \frac{2x^3 - x^3\sqrt{x^2 + 1}}{x^4 + 4x^5} dx;$

№2 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2 \cdot y}{x} = 2x^2;$$

№3 Найти решение системы дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \cdot x + 2 \cdot y \\ y'(t) = 7 \cdot x + 3 \cdot y \end{cases} \quad x = 1, y = -10 \text{ при } t = 0;$$

№4 Найти первые пять ненулевых членов разложения в степенной ряд для решения задачи Коши

$$4y = -y'' - 48 \cdot \cos(3x) \quad \begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = 4 \end{cases};$$

№5 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot (x+2)^n.$

Составил: _____ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: _____ Носырев Н.А.

Новоуральск 2023