Министерство образования и науки российской федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

НОВОУРАЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра Автоматизации управления

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие по курсу
“Вычислительные методы в решении инженерных задач»
Для студентов направления подготовки
15.03.05 - Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств,
заочной формы обучения

Новоуральск
2018

УДК 681.3.06

МиМ – 2.3. -   - 18

Автор Орлова Ирина Викторовна

Рецензент кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры ВМ Фоминых Марина Анатольевна

Вычислительные методы в решении инженерных задач. Учебно-методическое пособие по курсу «Вычислительные методы в решении инженерных задач» для преподавателей и студентов направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», заочной формы обучения.

Новоуральск, НТИНИЯУ МИФИ, 2018, 70 с.

Пособие представляет собой описание основных принципов построения и форматирования графиков функций, решения нелинейных уравнений, обработки экспериментальных данных, решения задачи аппроксимации и оптимизационных задач в Microsoft Office Excel 2010 и в пакете MathCad.
Содержит 78 рисунков, 15 таблиц, 23 библиографических названия.

Пособие может использоваться преподавателями при подготовке к занятиям по курсу «Вычислительные методы в решении инженерных задач», а также студентами при самостоятельном изучении курса и выполнении лабораторных работ.

Методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры
Протокол № 1/18 от 21 февраля 2018 г.

Зав. кафедрой П. А. Дюгай

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие электронной вычислительной техники, алгоритмических языков программирования и обширного математического обеспечения ЭВМ позволяет широко использовать методы вычислительной математики при решении различного рода прикладных задач в науке, технике, производстве.

Выбор литературы по описанию различных методов решения инженерных и экономических задач достаточно широк, однако сотруднику, не имеющему специального математического образования, или студенту, достаточно ограниченному во времени, часто бывает трудно разобраться в литературе по вычислительной математике и выбрать тот или иной метод решения стоящей перед ним задачи.

Настоящее пособие предназначено для преподавателей и студентов заочной формы обучения направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», а также для сотрудников и преподавателей, которые в своей работе встречаются с необходимостью построения и форматирования графиков функций, решения нелинейных уравнений, обработки экспериментальных данных и решения задачи аппроксимации, а также решения оптимизационных задач в Excel и в пакете MathCad.

Материал в пособии расположен в порядке нарастающей сложности. Изучая его, читатель постепенно приобретает знания, необходимые для понимания последующего материала.

При описании каждой рассматриваемой в данном пособии темы даются основные понятия и определения, используемые в дальнейшем. Изложение материала сопровождается необходимыми рисунками и конкретными примерами, которые способствуют лучшему пониманию материала и могут быть использованы при решении инженерных и экономических задач. Кроме того, при написании пособия был учтён опыт преподавания данного курса на кафедре Автоматизации управления НТИ НИЯУ МИФИ.

Пособие может использоваться преподавателями для подготовки к лекциям, а также студентами заочной формы обучения при самостоятельном изучении и выполнении лабораторных работ по курсу «Вычислительные методы в решении инженерных задач».

1 ПОСТРОЕНИЕ И ИЗМЕНЕНИЕ ДИАГРАММ И ГРАФИКОВ В EXCEL

Диаграммы являются графической формой представления информационных категорий данных. Они позволяют не только повысить наглядность излагаемого материала, но и отобразить соотношение различных величин, а также динамику изменения показателей. В EXCEL предусмотрены средства работы с диаграммами различных типов (рисунок 1.1). Следует отметить, что, по общему мнению, возможности построения диаграмм в EXCEL (так называемая *деловая графика*) относятся к числу наиболее сильных сторон продукта.

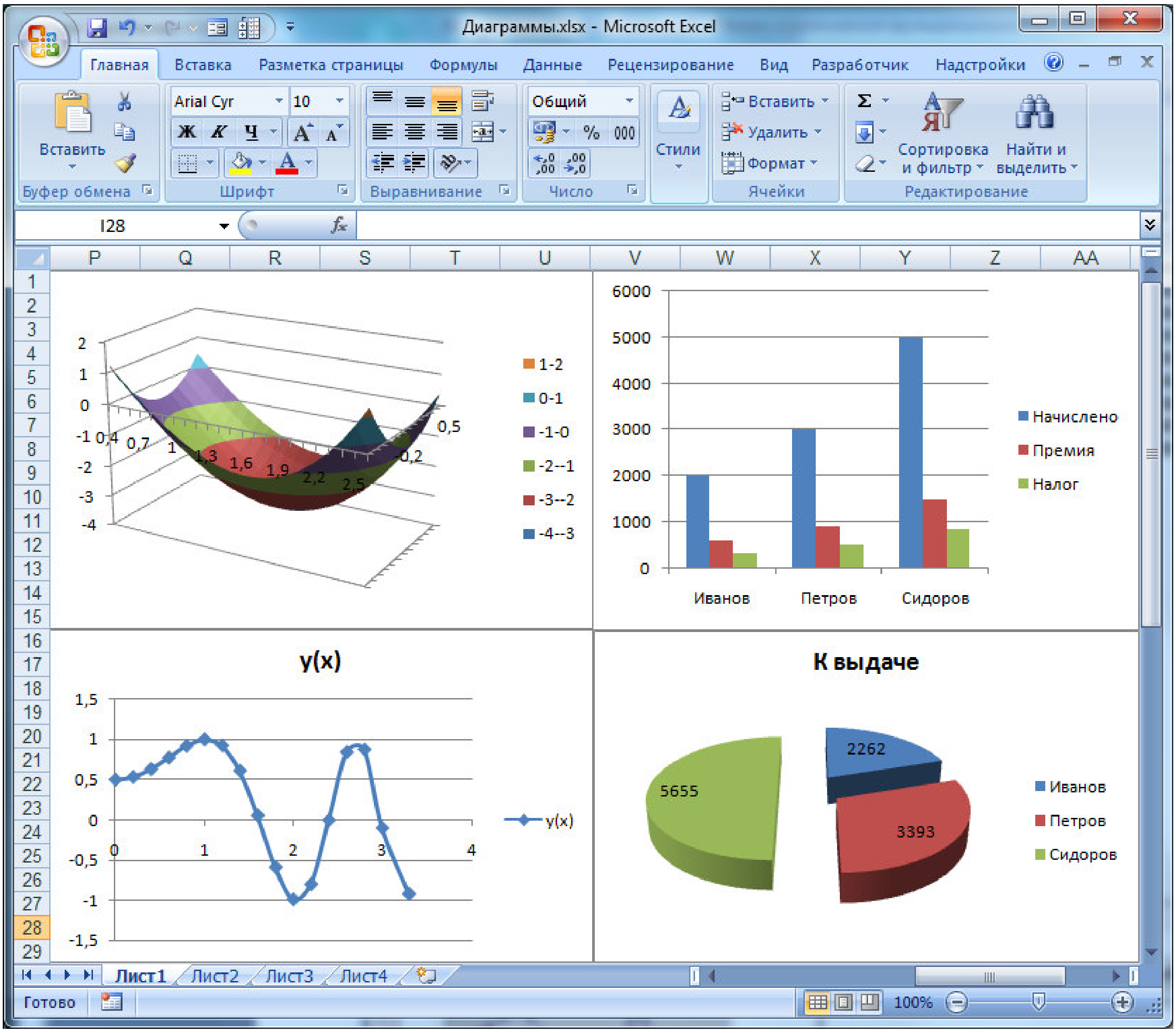


Рисунок 1.1 – Примеры типов диаграмм в Excel

1.1 Элементы диаграммы

Рассмотрим основные понятия, которыми мы будем оперировать при описании принципов работы с диаграммами в Excel.

Диаграмма создаётся на основе определённых данных и автоматически обновляется при их изменении.

В качестве *имён категорий* обычно используются заголовки столбцов или строк данных. Также имеется возможность создать другие имена.

Заголовки столбцов и строк часто используются и в качестве *имён рядов* данных. Имена рядов отображаются в *легенде* диаграммы.

Значения одной строки (столбца) таблицы на диаграмме должны быть представлены как *ряд данных*. Каждый ряд данных на диаграмме имеет определённый цвет или узор. Значение каждой ячейки отображается в виде *маркера*. Маркеры данных одного цвета представляют один ряд данных (маркером может быть точка, сегмент круга, столбик и т. д.). Если не указано иное, в качестве числового формата для оси Excel использует формат верхней левой ячейки заданного диапазона значений.

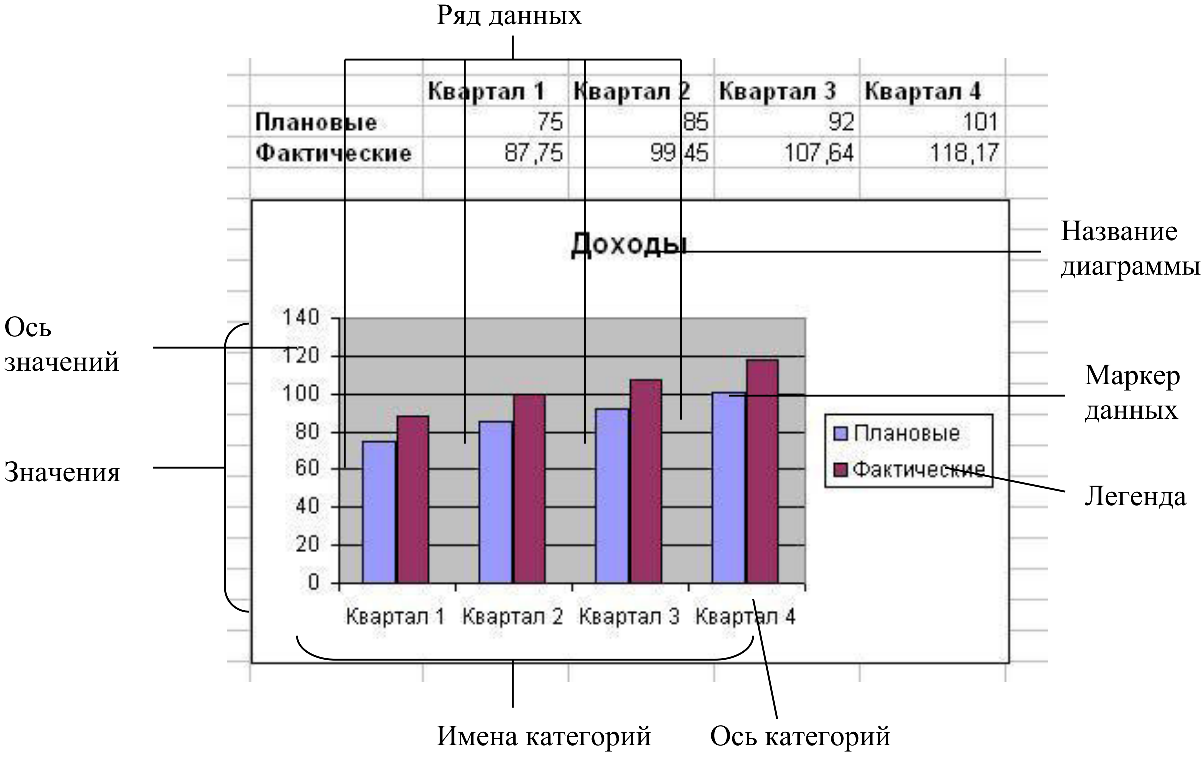


Рисунок 1.2 – Основные элементы диаграммы

1.2 Создание диаграммы

Построение диаграмм выполняется с помощью инструментов на вкладке Вставка из группы Диаграммы (рисунок 1.3).

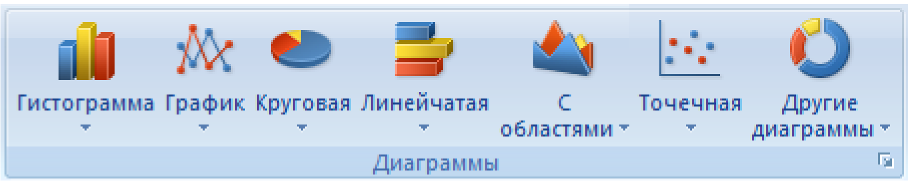


Рисунок 1.3 – Инструменты для построения диаграмм на вкладке Вставка

Прежде чем воспользоваться одним из инструментов для создания диаграммы нужного типа, на рабочем листе необходимо выделить ячейки, данные из которых будут представлены на диаграмме. Выделенный фрагмент должен содержать ячейки с названиями строк и столбцов, которые впоследствии будут использованы в легенде диаграммы, а также на самой диаграмме в качестве меток осей.

<u>Пример 1.1</u>. Рассмотрим построение *диаграммы*, отображающей в наглядном графическом виде данные рабочего листа, представленного на рисунке 1.4.

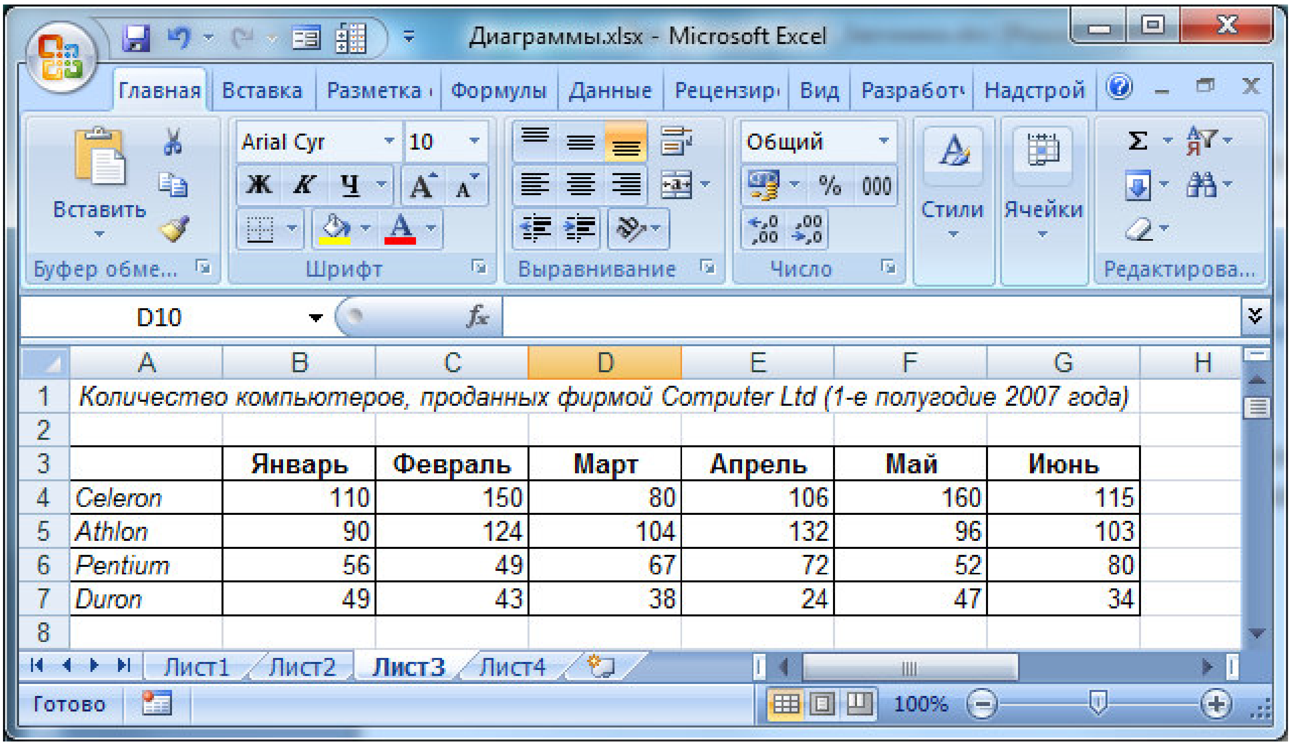


Рисунок 1.4 – Таблица-пример

Представим сначала в графической форме данные о продажах за второй квартал (апрель, май, июнь), то есть данные, находящиеся в столбцах E, F, G. Кроме того, нас интересуют также названия процессоров, находящиеся в столбце A.

Чтобы выделить несколько диапазонов, выделяем сначала обычным способом первый (A4:A7), а затем при нажатой клавише <Ctrl> второй диапазон (E3:G7).

После этого перейдём на вкладку Вставка и воспользуемся одним из инструментов в группе Диаграммы. Также можно воспользоваться окном Вставка диаграммы, которое открывается по щелчку мышью на раскрывающей кнопке в заголовке группы Диаграммы.

Для отображения данных, представленных в нескольких столбцах (строках), удобно воспользоваться стандартным типом Гистограмма. Выберем нужный вид гистограммы в раскрывающемся списке (рисунок 1.5).

Диаграмма построена (рисунок 1.6). Теперь её можно перемещать и форматировать "вручную", пользуясь командами вкладки Работа с диаграммами (вкладки Конструктор, Макет, Формат), которая появляется, если щёлкнуть мышью на диаграмме.

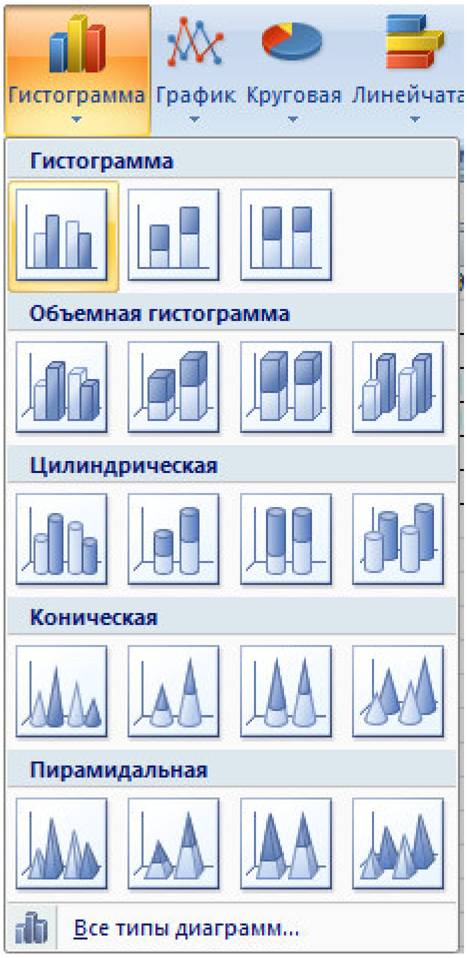


Рисунок 1.5 – Виды гистограмм

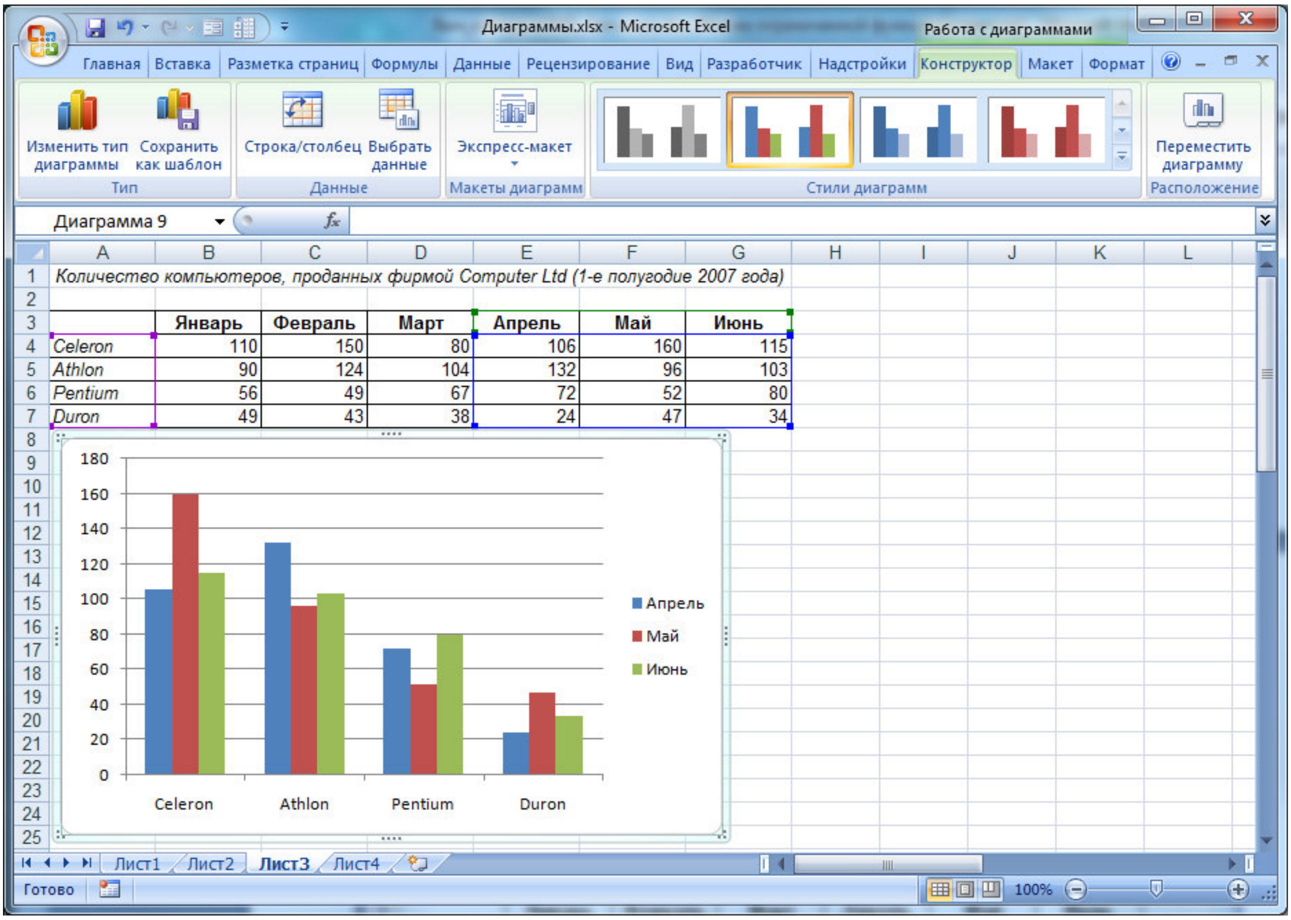


Рисунок 1.6 – Диаграмма-гистограмма

Для изменения отдельно каждого элемента диаграммы удобно воспользоваться инструментами вкладки Работа с диаграммами/ Макет (рисунок 1.7), а также контекстным меню. Например, можно добавить заголовок для диаграммы, изменить параметры осей, увеличить или уменьшить размер шрифта в названии и легенде, изменить цвет маркеров каждого ряда, изменить фон диаграммы и т.д.

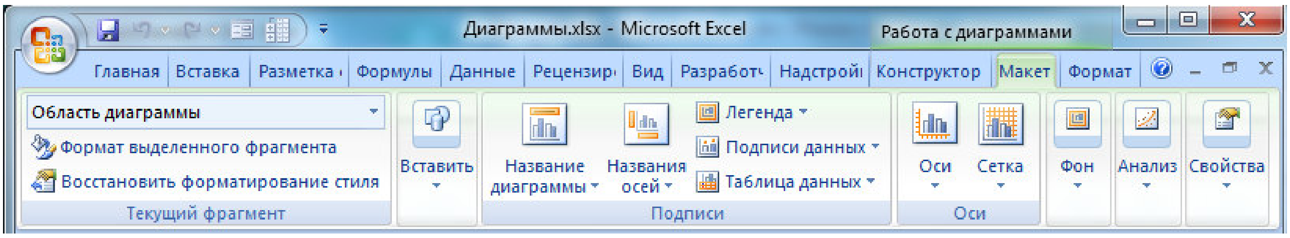


Рисунок 1.7 –Вкладка Работа с диаграммами/ Макет

С помощью команды Выбрать данные(вкладка Конструктор) открывается соответствующее диалоговое окно (рисунок 1.8), с помощью которого можно добавлять и удалять ряды данных, а также изменять их подписи. Кнопка Строка/столбец позволяет изменить вариант построения рядов данных – по строкам или по столбцам (менять местами подписи категорий данных по оси абсцисс и в легенде).

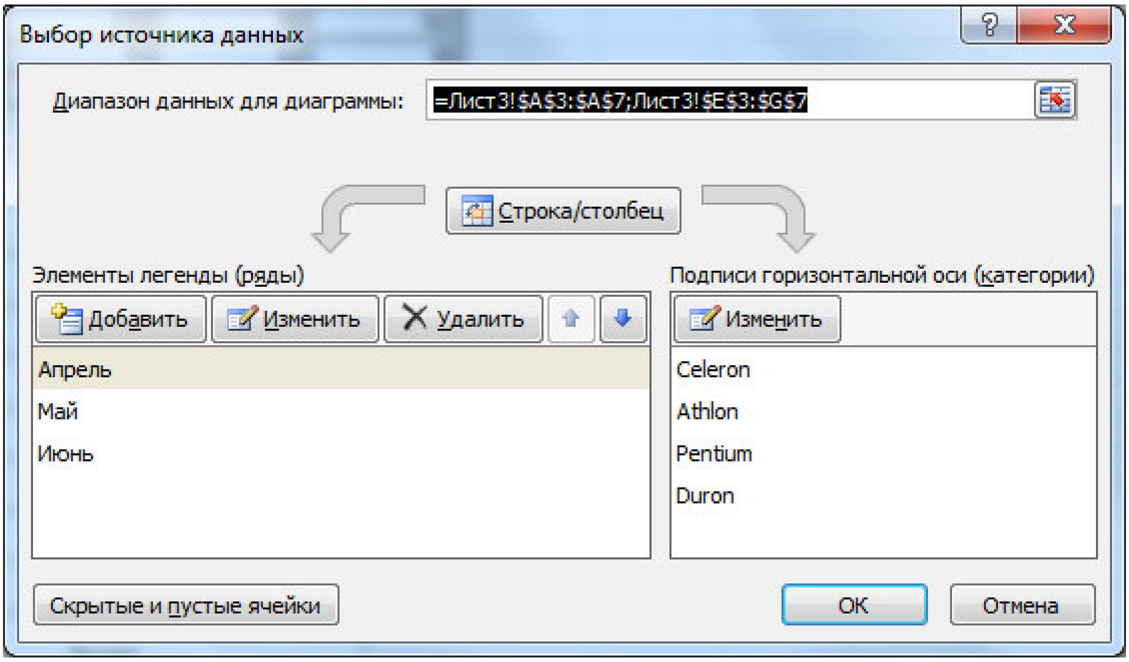


Рисунок 1.8 –Диалоговое окно ***Выбор источника данных***

Диаграмму можно разместить либо на рабочем листе, либо в специальном листе диаграммы. В первом случае при выводе на печать на одной странице нетрудно разместить и таблицу, и диаграмму. Для изменения месторасположения диаграммы можно воспользоваться командой: вкладка Работа с диаграммами/ Конструктор/ Переместить диаграмму.

1.3 Типы диаграмм

В Excel пользователи могут создавать диаграммы различных типов и по-разному их форматировать. Выбирая формат, вы тем самым определяете способ отображения диаграммы данного типа. Когда на диаграмме представлен один ряд данных, все маркеры данных имеют одинаковый цвет. Если же рядов данных несколько, маркеры выделяются различными цветами.

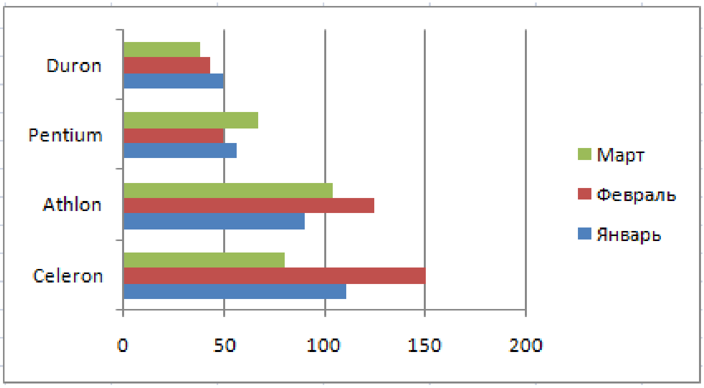
Гистограмма

В гистограмме (её также называют столбиковой диаграммой) отдельные значения представлены вертикальными столбиками различной высоты (рисунок 1.6). Высота столбика определяется соответствующим ему значением. Диаграммы этого типа удобно использовать для сравнения значений, относящихся к определённому периоду времени. Для представления итогового значения, складывающегося из отдельных составляющих, можно воспользоваться составной гистограммой, столбцы в которой ставятся один на другой (рисунок 1.4, 3-й столбец).

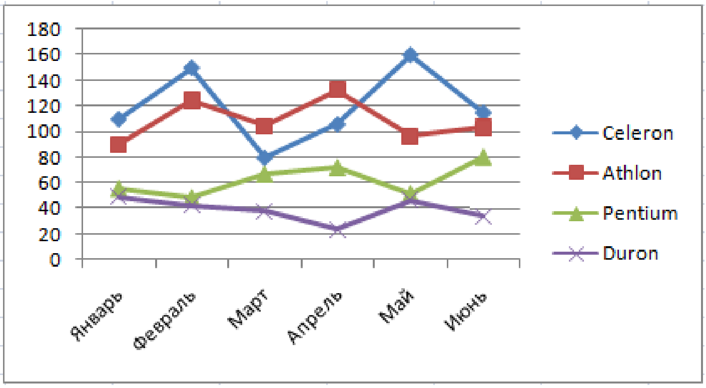
Маркеры данных на объёмных диаграммах могут иметь коническую, цилиндрическую или пирамидальную форму.

Линейчатая диаграмма

В отличие от гистограммы, где полоски (столбики) располагаются вертикально, то есть параллельно оси Y, полоски в линейчатой диаграмме развёрнуты горизонтально, параллельно оси X. Длина полоски определяется соответствующим ей числовым значением.



График



Маркеры данных на графиках представляют собой линии, которые соединяют определённые значения. В объёмных графиках линии имеют форму лент. Применять график не рекомендуется, если описываемые им абсолютные величины не связаны между собой.

Круговая диаграмма

Круговая диаграмма строится в виде круга, разбитого на несколько сегментов, каждый из которых соответствует определённому значению, входящему в суммарный показатель (рисунок 1.1, внизу справа). Сумма всех значений принимается равной 100%.

При построении круговой диаграммы используется только один ряд данных. Если для представления значений в выделенных ячейках требуется несколько рядов данных, диаграмма будет создана лишь для первого из них.

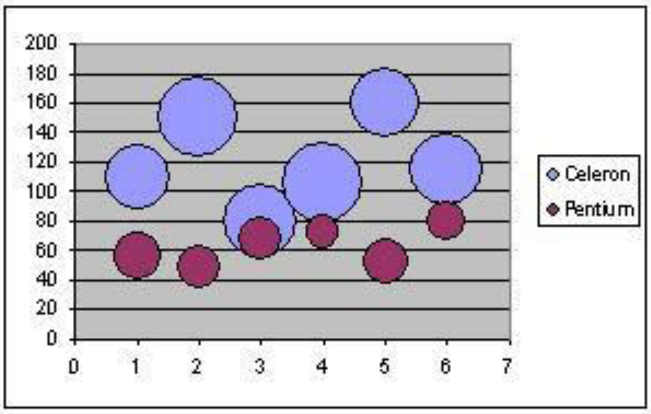
Кольцевая диаграмма

Кольцевая диаграмма – это разновидность круговой диаграммы. Здесь сумма всех значений также принимается равной 100%, а ряды данных представлены в виде вложенных колец, которые разделены на сегменты с учётом их процентного соотношения. Преимущество кольцевой диаграммы по сравнению с круговой состоит в том, что она позволяет отображать несколько рядов данных одновременно. Однако следует учитывать, что с увеличением их количества размеры областей, которые отводятся для каждого такого ряда, уменьшаются.

Точечная диаграмма

В точечной диаграмме маркерами являются точки в декартовой системе координат. Диаграммы такого типа больше всего подходят для представления взаимосвязи между двумя или несколькими значениями. Из точечной диаграммы путем добавления соединительных линий можно легко получить график (рисунок 1.1, внизу слева).

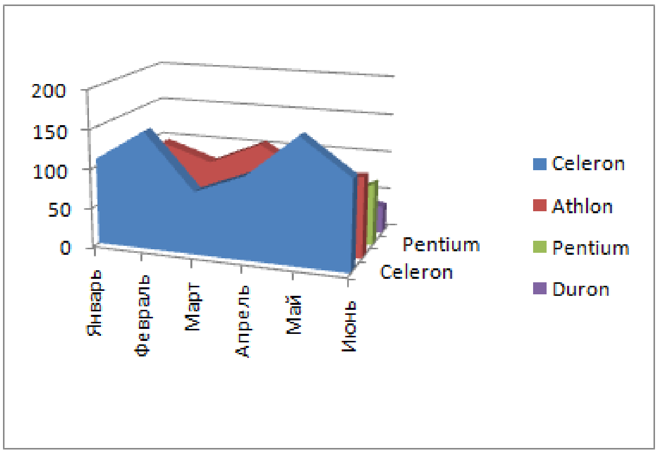
Пузырьковая диаграмма



Пузырьковая диаграмма напоминает точечную. Отличие состоит в том, что маркеры пузырьковой диаграммы характеризуются двумя значениями. Первое определяет положение маркера на плоскости, а второе – его размер.

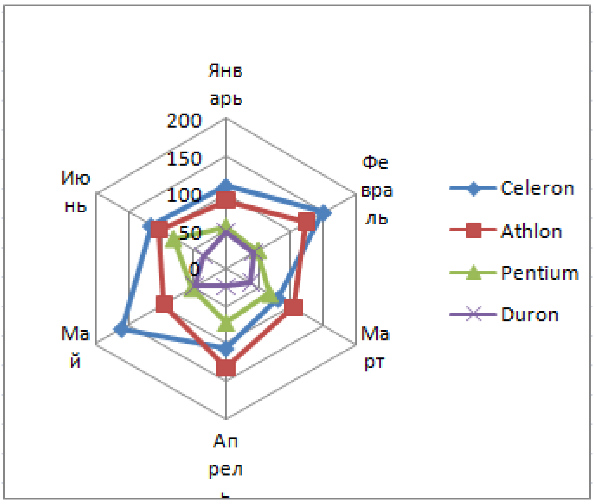
Диаграмма с областями

В диаграмме с областями в качестве маркеров используются области, закрашенные разными цветами. При построении диаграммы данного типа отдельные значения таблицы рассматриваются как выборка из некоторого множества значений, получаемого путём интерполяции. Диаграмму с областями не следует применять, если данные не связаны между собой. Ряды данных в ней можно представить как части целого.



Лепестковая диаграмма

Маркеры на лепестковой диаграмме представляют собой лучи, выходящие из одной точки. Каждый маркер ряда данных находится на оси и соединён с другими маркерами замкнутой линией.



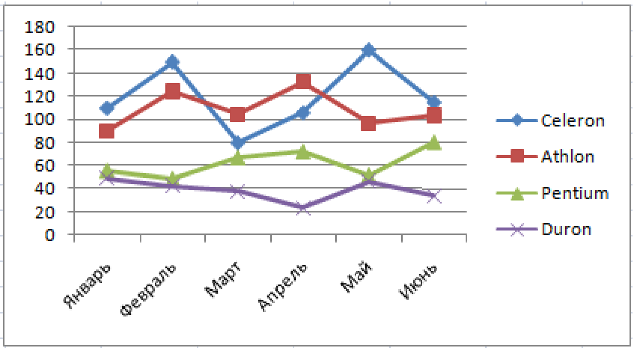
Объёмная поверхностная диаграмма

Принцип построения объёмных поверхностных диаграмм напоминает применяемый в картографии принцип представления высоты местности над уровнем моря. Совокупность всех значений отображается на диаграмме в виде поверхности, области которой представляют собой ряды данных (рисунок 1.1, вверху слева).

1.4 Построение графиков функций в EXCEL

Тенденцию изменения некоторых величин очень удобно наблюдать, если полученные данные представить в виде графика. На графиках данные могут отображаться в виде отдельных точек, либо маркеры данных соединяются линиями.

В Microsoft EXCEL графики функций, зависящих от одной переменной, могут быть созданы с помощью вставки диаграммы, выбрав один из двух типов: **график** или **точечная** диаграмма (рисунок 1.9).



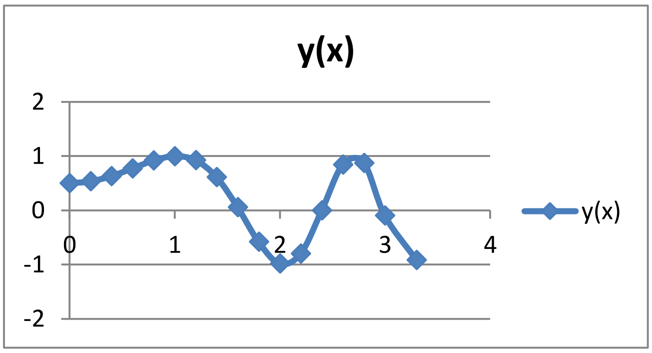


Рисунок 1.9 – Примеры диаграмм в Excel типов график (слева) и точечная (справа)

С помощью диаграммы типа **график** удобно представлять данные, полученные для независимой переменной, изменяющейся с постоянным шагом или имеющей текстовые значения. С помощью **точечной диаграммы** можно отображать данные, полученные на *неравномерной сетке* изменения независимой переменной, а также строить графики математических функций.

В Microsoft Excel имеется большой набор встроенных функций, что позволяет записать формулу для вычисления практически любого математического выражения.

Электронные таблицы имеют средства автоматического заполнения строк и столбцов рядами данных и формулами.

Ряды числовых значений, полученные в результате вычислений по формулам, могут быть наглядно представлены графически.

Для построения графика функции, зависящей от одной переменной необходимо:

1 Заполнить столбец (строку) значений независимой переменной. Для более точного отображения графика значения этой переменной должны изменяться с достаточно мелким шагом. Чтобы заполнить ряд числовых значений можно воспользоваться функцией автозаполнения или командой: вкладка **Главная /Редактирование** / **Заполнить** / **Прогрессия**.

2 С помощью ввода и копирования формулы заполнить столбец (строку) значений заданной функции;

3 Выделить заполненные ряды данных;

4 Выполнить команду: вкладка **Вставка** / **Диаграмма**/ **Точечная** или **График**.

<u>Пример 1.2</u>. Построить графики функций для $0 \le x \le 3$

$y(x) = \sin(x^2 + \pi/6)$
$z(x) = 0{,}5x^3 - 4x + 2$

Заполним столбцы данными (рисунок 1.10):

● В ячейках A1:C1 разместим заголовки столбцов;

● В столбце A введём значения для переменной x, изменяющиеся от 0 до 3 с шагом 0,2. Можно воспользоваться для этого функцией автозаполнения.

● В ячейку B2 запишем формулу =SIN(A2^2+ПИ()/6). С помощью автозаполнения скопируем эту формулу на остальные ячейки столбца B;

● В ячейку C2 введём формулу =A2^3/2-4*A2+2. С помощью автозаполнения скопируем эту формулу на остальные ячейки столбца C;

● Для наглядности оформим ячейки диапазона A1:C17 границами.

B2 f_x =SIN(A2^2+ПИ()/6)

	A	B	C	D
1	x	y(x)	z(x)	
2	0	0,5	2	
3	0,2	0,534232	1,204	
4	0,4	0,631587	0,432	
5	0,6	0,773027	-0,292	
6	0,8	0,918234	-0,944	
7	1	0,998886	-1,5	
8	1,2	0,92384	-1,936	
9	1,4	0,611531	-2,228	
10	1,6	0,057961	-2,352	
11	1,8	-0,58267	-2,284	
12	2	-0,98223	-2	
13	2,2	-0,79535	-1,476	
14	2,4	0,000413	-0,688	
15	2,6	0,841694	0,388	
16	2,8	0,872931	1,776	
17	3	-0,09866	3,5	

Рисунок 1.10 – Заполнение столбцов данными для примера 1.1

1.4.1 Построение *графиков с использованием* ***Точечной диаграммы***

● Выделим весь диапазон A1:C17;

● Выполним команду: вкладка **Вставка** / **Диаграмма**/ **Точечная**(рисунок 1.11)и выберем нужный вид графика (например, 2-й в первом ряду);

● Точечный график готов (рисунок 1.12).

При использовании точечной диаграммы данные левого столбца автоматически выбираются в качестве значений для оси X, а заголовки столбцов – именами рядов, т.е. строящихся графиков.

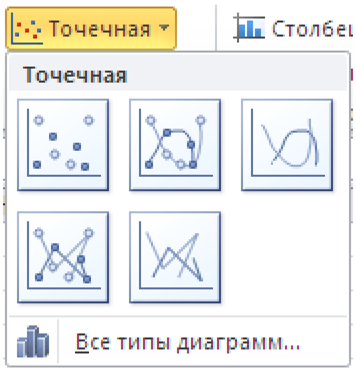


Рисунок 1.11 – Выбор типа диаграммы

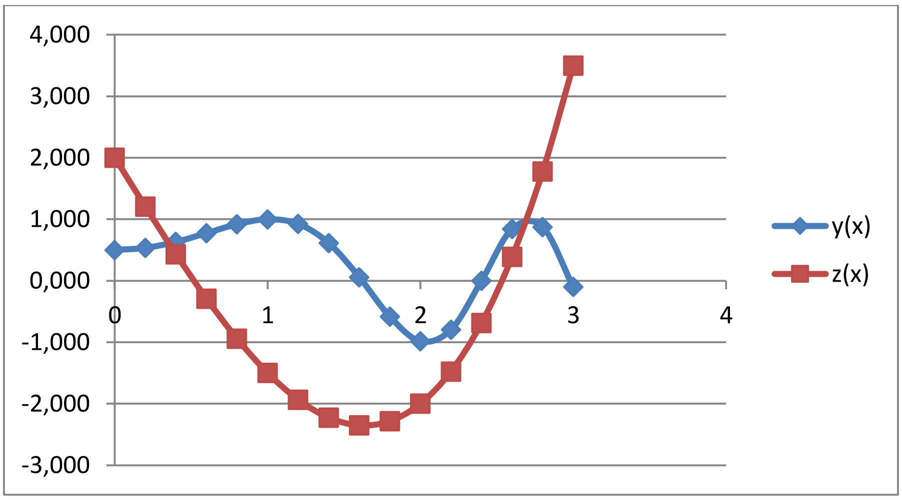


Рисунок 1.12 – Точечный график по данным диапазона A1:C17

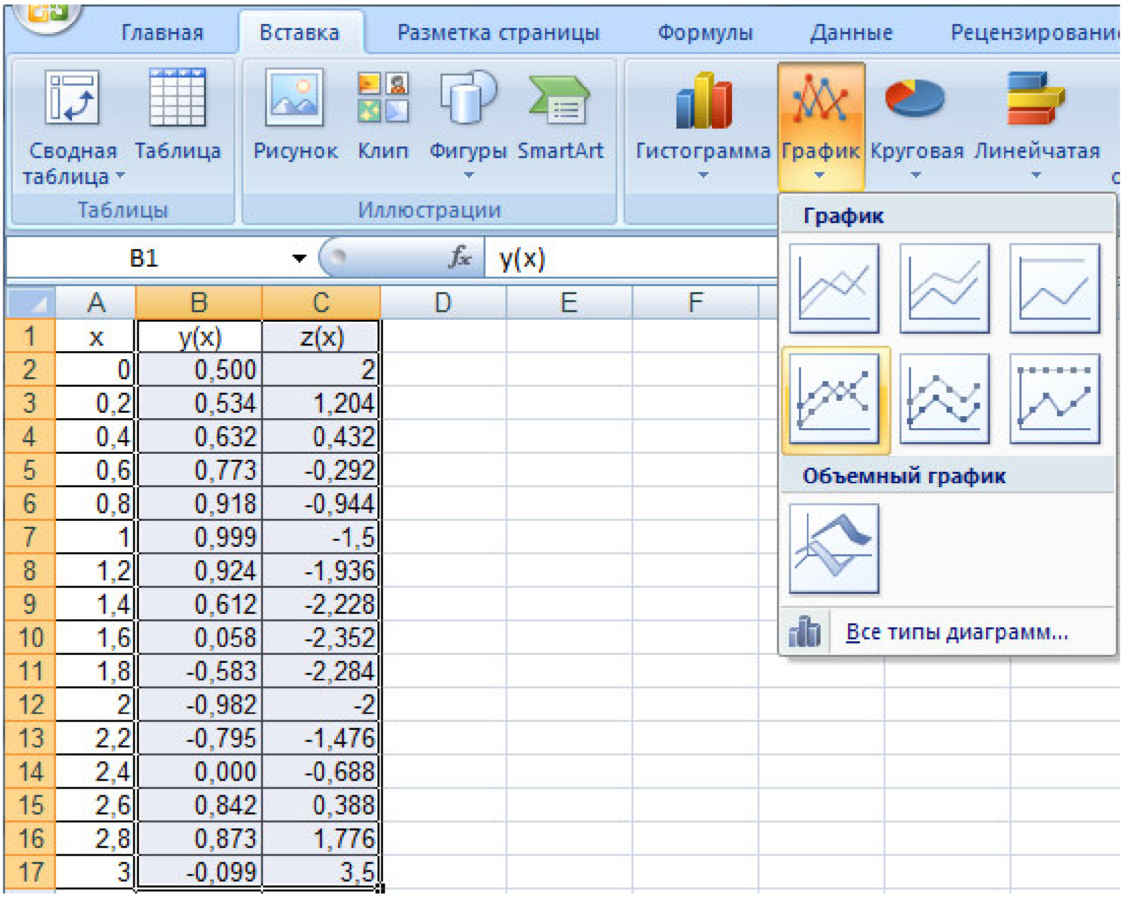
● Готовую диаграмму можно редактировать и форматировать с помощью команд вкладок **Работа с диаграммами** / **Конструктор** и **Макет**(см. пункт 1.2).

1.4.2 Построение графиков с использованием диаграммы **График**

● Выделим диапазон, содержащий только значения функций для отображения на графике, - в нашем случае B1:C17 (рисунок 1.13);

● Выполним команду: вкладка **Вставка** / **Диаграмма**/ **График** (рисунок 1.12) и выберем нужный вид графика (например, 1-й во втором ряду);

● График почти готов (рисунок 1.14).



	A	B	C
1	x	y(x)	z(x)
2	0	0,500	2
3	0,2	0,534	1,204
4	0,4	0,632	0,432
5	0,6	0,773	-0,292
6	0,8	0,918	-0,944
7	1	0,999	-1,5
8	1,2	0,924	-1,936
9	1,4	0,612	-2,228
10	1,6	0,058	-2,352
11	1,8	-0,583	-2,284
12	2	-0,982	-2
13	2,2	-0,795	-1,476
14	2,4	0,000	-0,688
15	2,6	0,842	0,388
16	2,8	0,873	1,776
17	3	-0,099	3,5

Рисунок 1.13 – Выбор исходных данных для построения графика

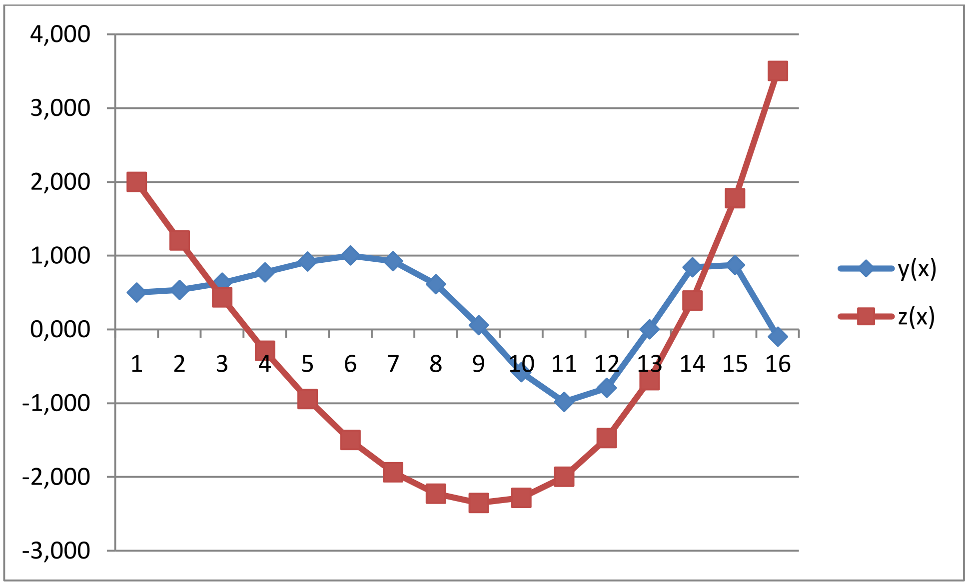


Рисунок 1.14 –График по данным диапазона B1:C17

● Чтобы отобразить нужные значения по оси X, на вкладке **Конструктор** (либо из контекстного меню) выберем команду **Выбрать данные**. В открывшемся окне **Выбор источника данных** в поле Подписи горизонтальной оси (категории) щёлкнем по кнопке Изменить и выделим диапазон данных, которые должны отображаться в качестве значений для оси X – в данном примере, диапазон значений A2:A17.

Заголовки столбцов используются как имена рядов, т.е. строящихся графиков.

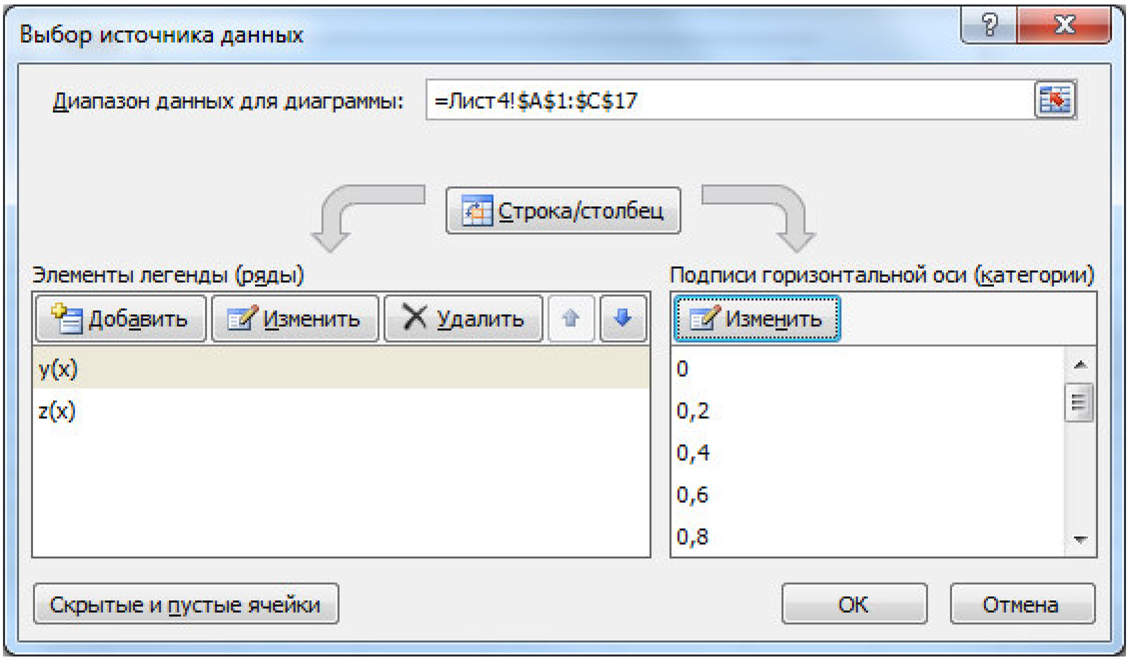


Рисунок 1.15 – Изменение подписей горизонтальной оси для построенного графика

Теперь график окончательно готов. Для получения более гладкого графика следует задавать достаточно мелкий шаг сетки для независимой переменной X.

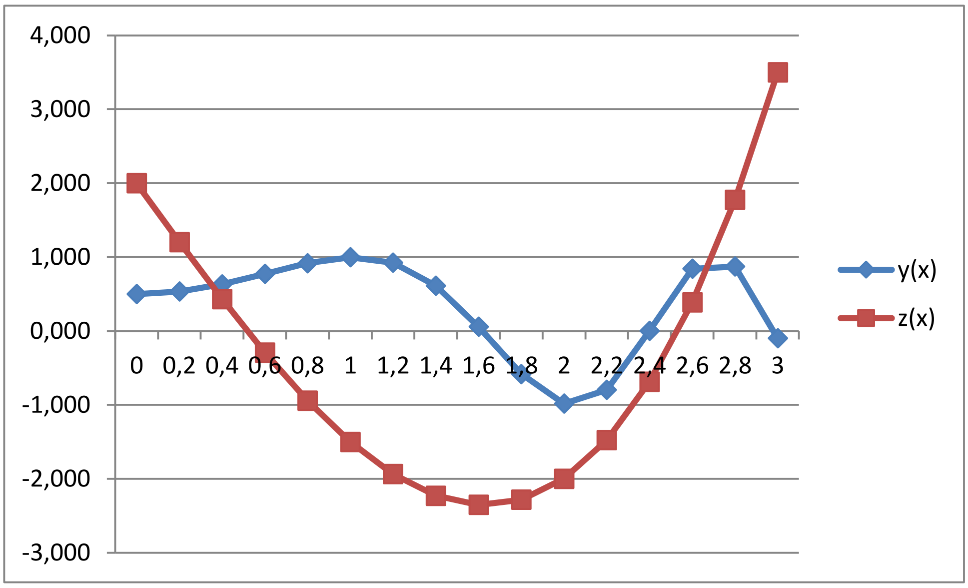


Рисунок 1.16 –Итоговый график по данным диапазона B1:C17

1.5 Форматирование графиков функций в EXCEL

Когда график готов, его можно изменять, пользуясь контекстным меню (рисунок 1.17) или командами вкладок **Работа с диаграммами** / **Конструктор** и **Макет** (см. пункт 1.2), которые появляются, когда диаграмма выделена.

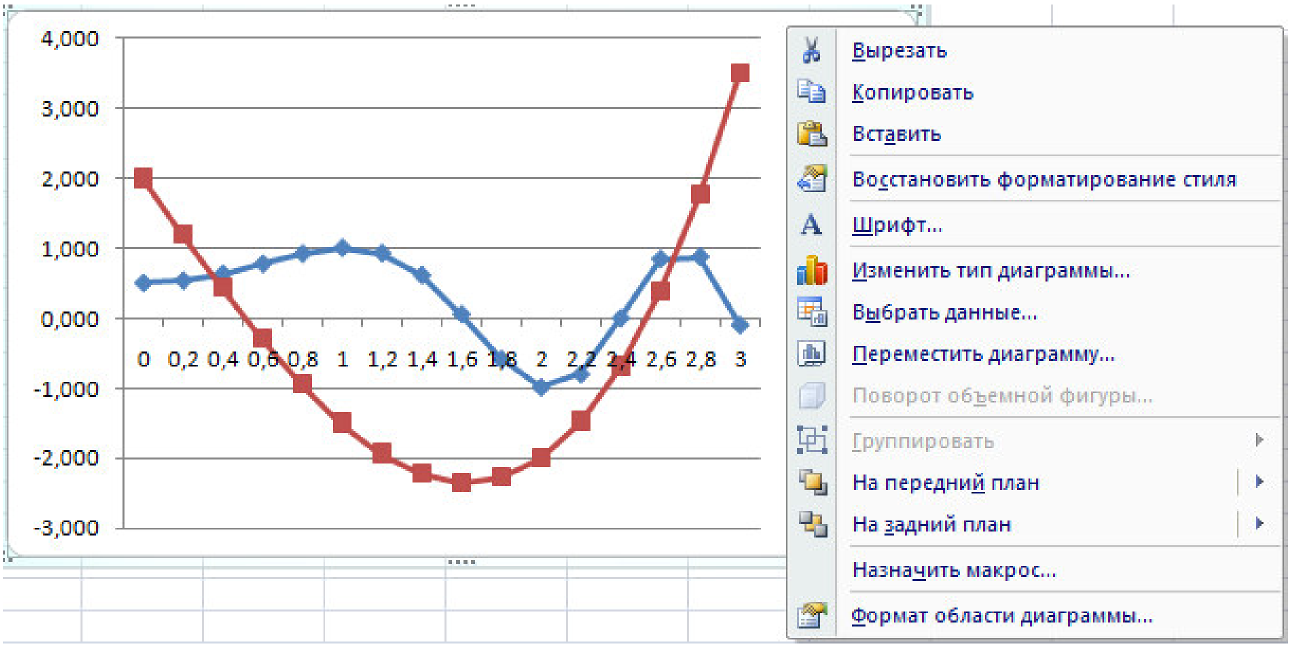
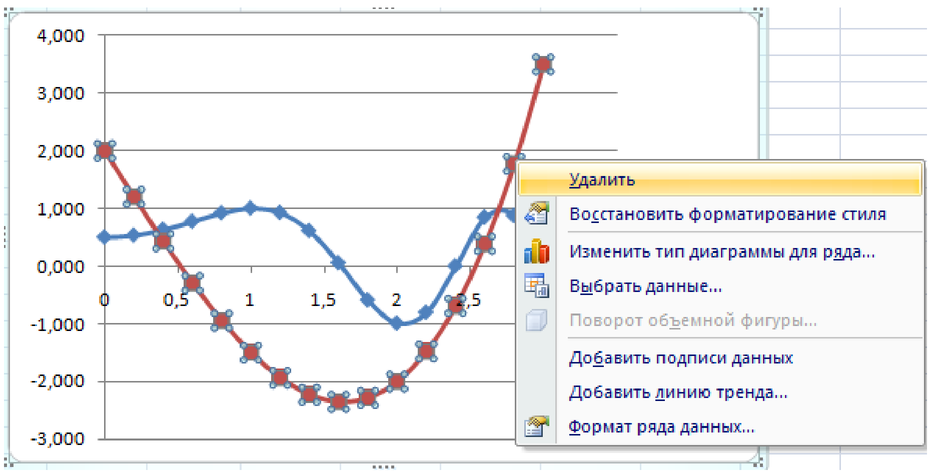


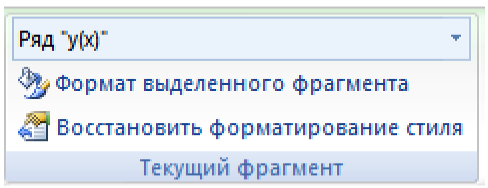
Рисунок 1.17 –Контекстное меню для построенного графика

1.5.1 Изменение рядов данных

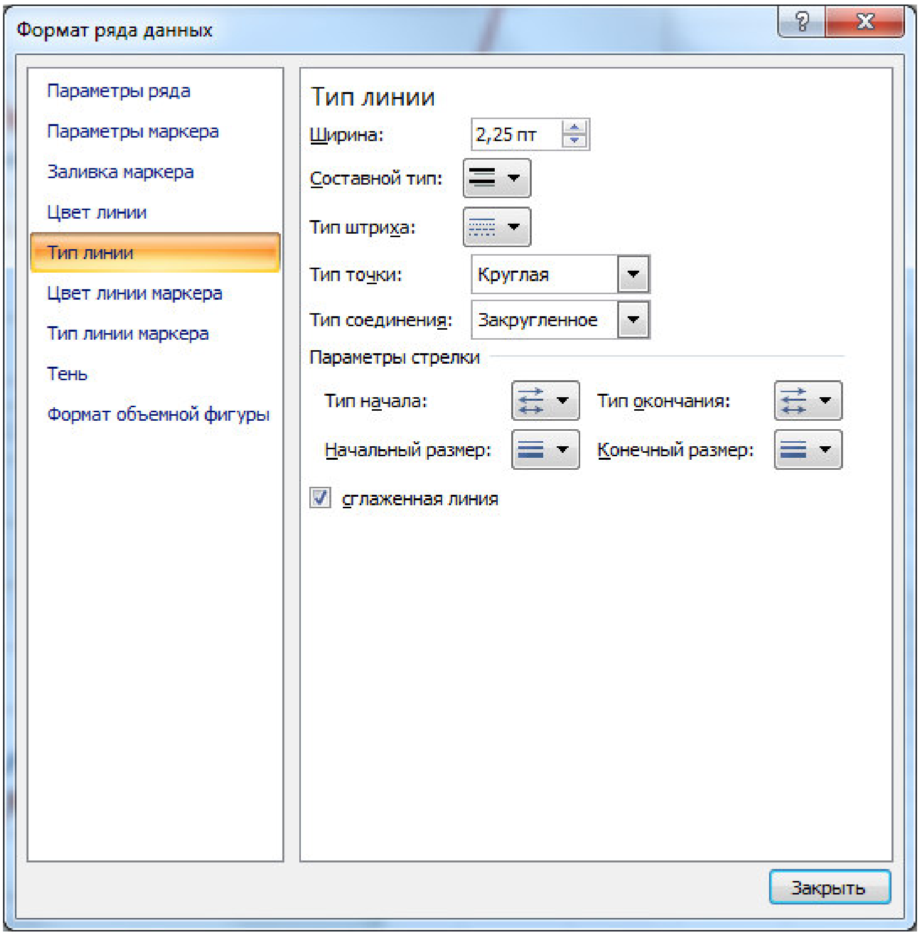
1 Вызвать контекстное меню для линии или маркера графика и выбрать **Формат ряда данных…**



или на вкладке **Макет** (слева) в списке **Текущий фрагмент** выбрать нужный ряд и выбрать команду Формат выделенного фрагмента;



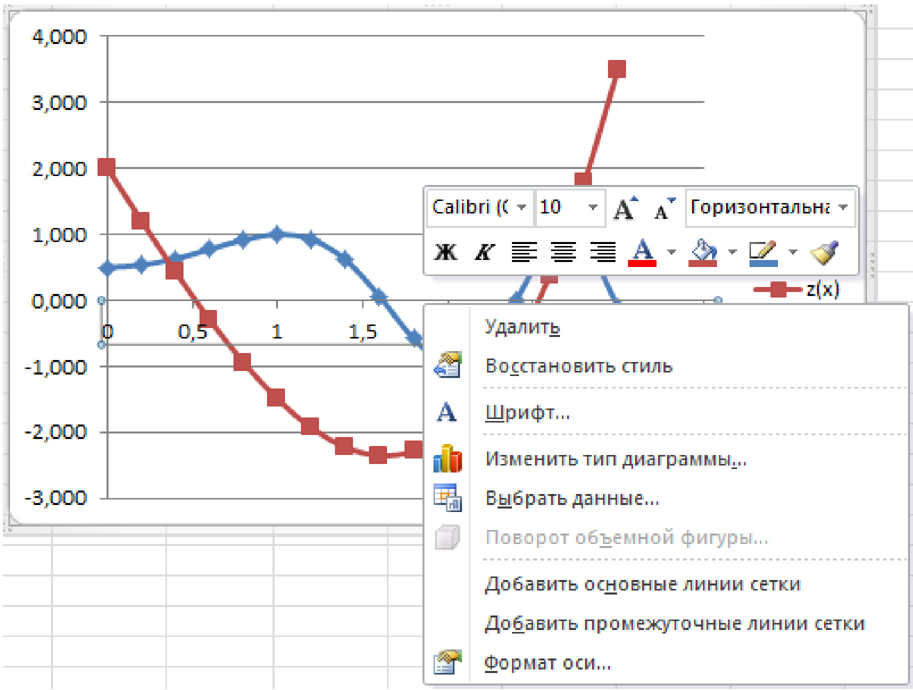
2 В окне **Формат ряда данных** – выбрать нужное форматирование линии и маркеров;



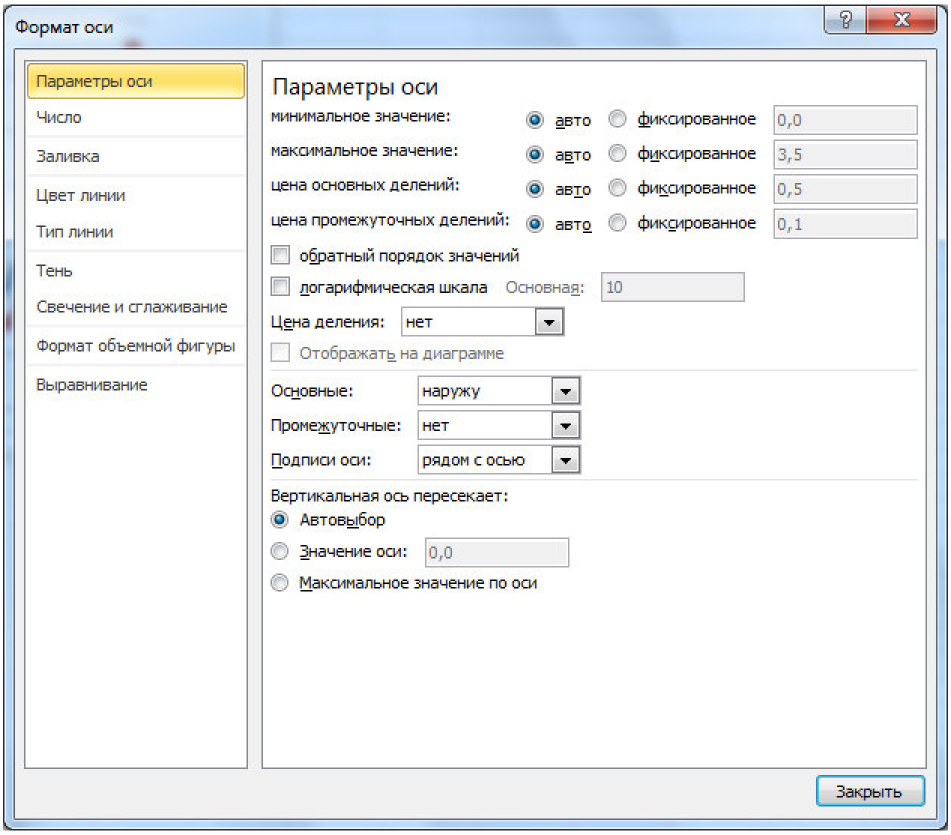
1.5.2 Форматирование оси

1 Вызвать контекстное меню для оси и выбрать **Формат оси**… или воспользоваться командой: вкладка **Макет**/ **Оси**/ **Дополнительные параметры основной горизонтальной (вертикальной) оси…**;

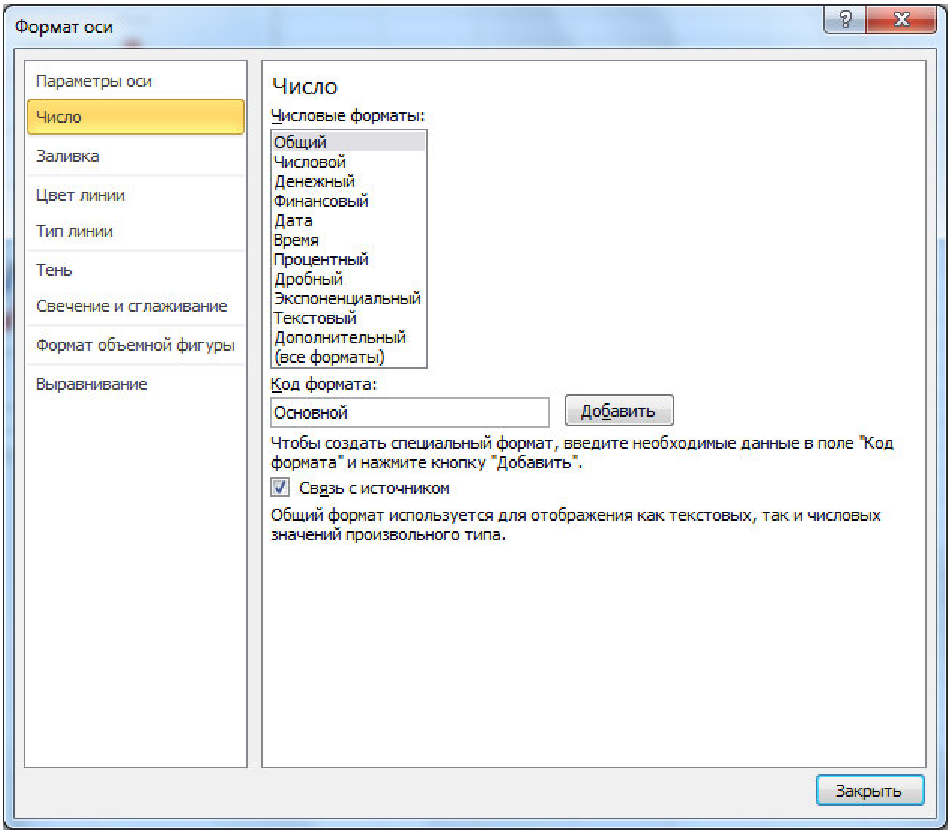
.



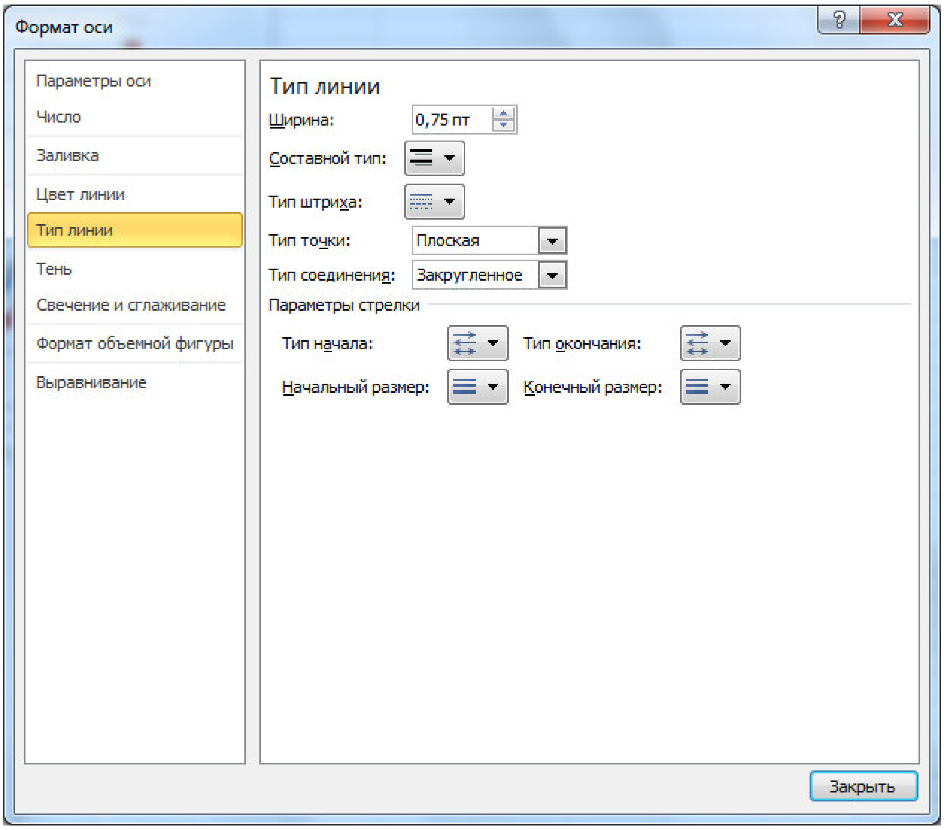
2 на вкладке **Параметры оси** можно задать минимальное и максимальное значения, цену основных делений шкалы значений для оси и другие параметры.



3 на вкладке **Число** – выбрать числовой формат отображения меток делений;

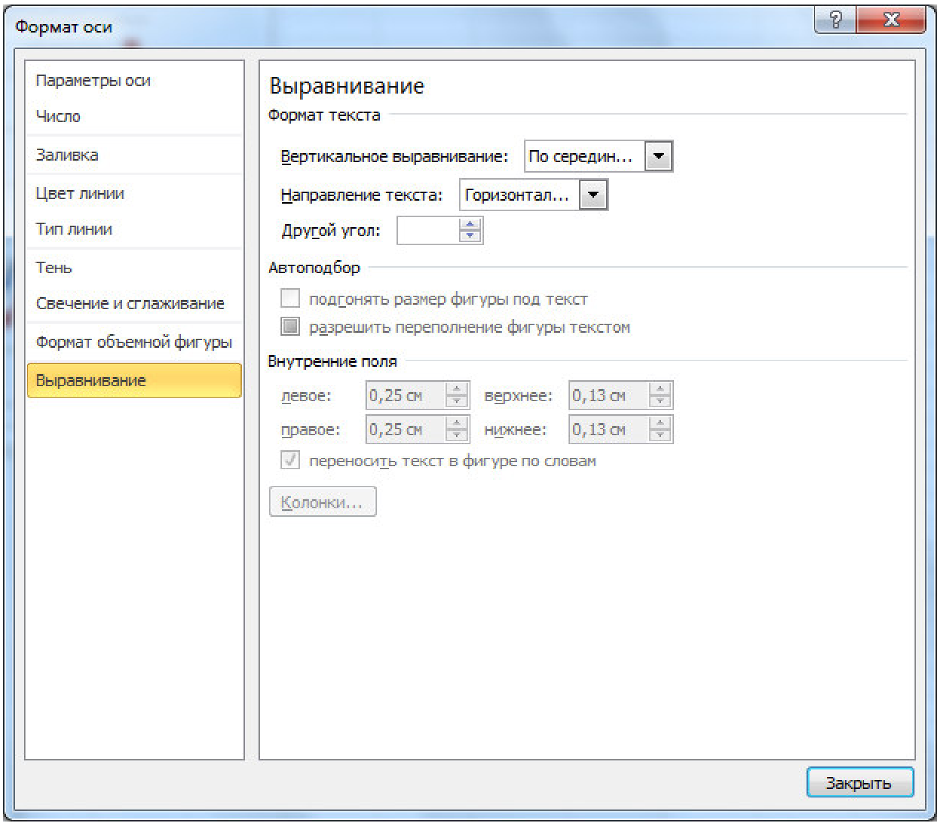


4 на вкладке **Тип линии** – выбрать тип линии и расположение штрихов и меток делений;



5 на вкладке **Цвет линии** – задать цвет;

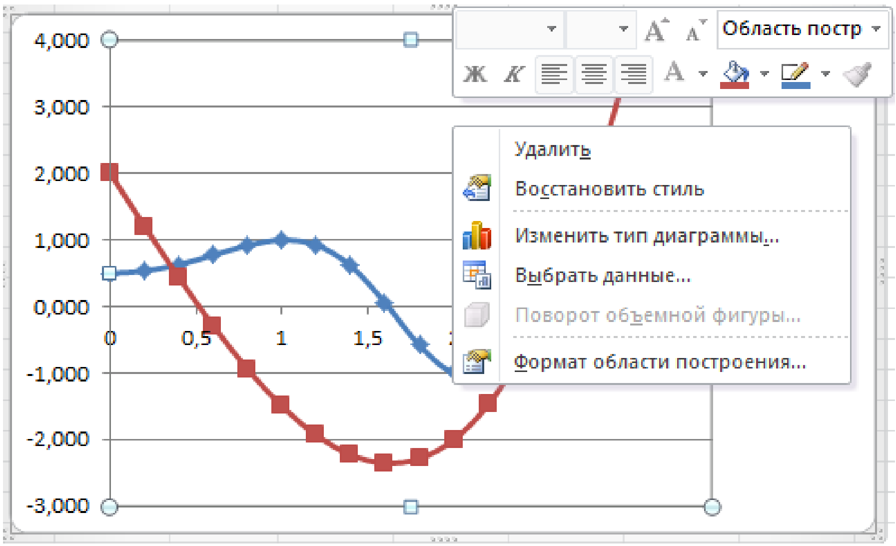
6 на вкладке **Выравнивание** – выбрать ориентацию и направление текста меток оси.



1.5.3 Изменение фона

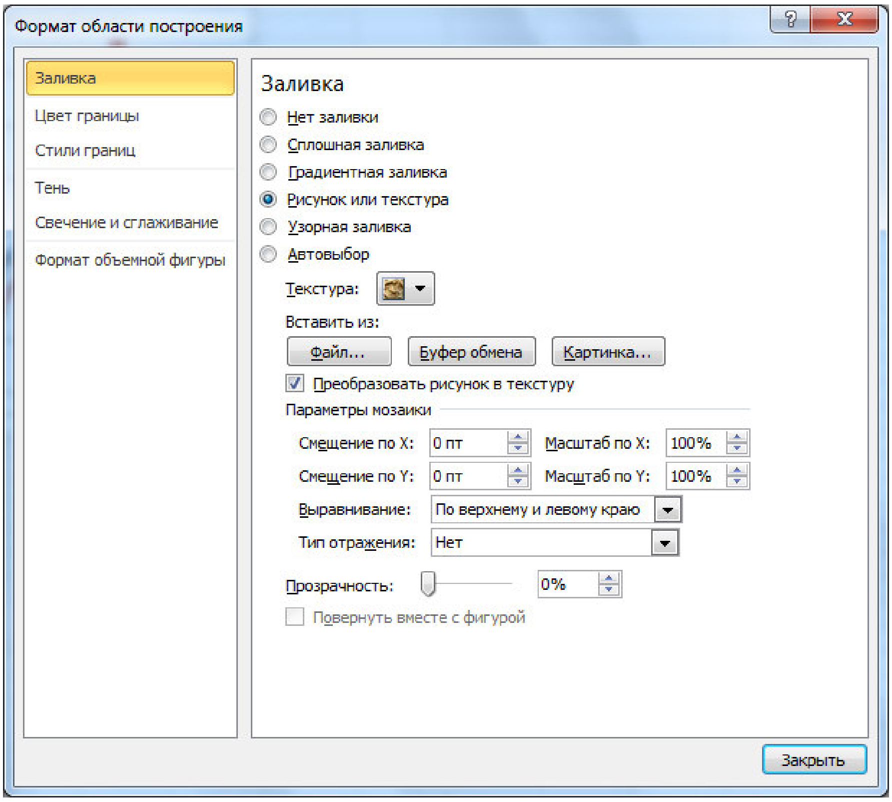
1 Вызвать контекстное меню для области построения графика;

.



2 на вкладке **Заливка –** можно задать оформление фона узором, градиентной заливкой или выбрать рисунок в качестве фона;

Также можно задать цвет и стиль границ и создать некоторые дополнительные эффекты;



1.6 Построение графиков поверхностей в EXCEL

Графиком функции, зависящей от двух переменных, является поверхность (рисунок 1.1, вверху слева).

Для построения в Excel графика поверхности необходимо:

1Создать таблицу значений функции от двух переменных, для чего:

- в первой строке таблицы (которая будет заголовками столбцов) разместить значения первой переменной, изменяющиеся от начального значения до конечного с некоторым шагом;
- в первом столбце таблицы (который будет подписями строк) разместить значения второй переменной, также изменяющиеся от начального значения до конечного с некоторым шагом;
- в первую ячейку таблицы данных ввести формулу с использованием смешанных ссылок на ячейки, содержащие начальные значения соответствующих переменных;

● скопировать формулу на остальные ячейки таблицы.

2 Выделить ячейки с данными для диаграммы вместе с подписями и заголовками столбцов, т.е. вместе со столбцом и строкой, содержащими значения для первой и второй переменной;

3 Выполнить команду: вкладка **Вставка** / **Диаграммы/ Другие/ Поверхность**.

Пример 1.3. Построить график функции двух переменных

$f(x,y) = 0{,}5\cdot x^3 + 4\cdot y^2 - 4\cdot x - 4\cdot y + 2$ для $0{,}4 \le x \le 2.6$, $-0.2 \le y \le 1$

Решение.

1) На рисунке 1.18 представлена таблица с подготовленными данными для построения графика поверхности.

Столбец A содержит значения переменной *x*

Ячейки таблицы содержат формулу

Строка 1 содержит значения переменной *y*

B2 f_x =0,5*$A2^3+4*B$1^2-4*$A2-4*B$1+2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0,4	1,39	0,87	0,43	0,07	-0,21	-0,41	-0,53	-0,57	-0,53	-0,41	-0,21	0,07	0,43
3	0,5	1,02	0,5	0,06	-0,3	-0,58	-0,78	-0,9	-0,94	-0,9	-0,78	-0,58	-0,3	0,06
4	0,6	0,67	0,15	-0,29	-0,65	-0,93	-1,13	-1,25	-1,29	-1,25	-1,13	-0,93	-0,65	-0,29
5	0,7	0,33	-0,19	-0,63	-0,99	-1,27	-1,47	-1,59	-1,63	-1,59	-1,47	-1,27	-0,99	-0,63
6	0,8	0,02	-0,5	-0,94	-1,3	-1,58	-1,78	-1,9	-1,94	-1,9	-1,78	-1,58	-1,3	-0,94
7	0,9	-0,28	-0,8	-1,24	-1,6	-1,88	-2,08	-2,2	-2,24	-2,2	-2,08	-1,88	-1,6	-1,24
8	1	-0,54	-1,06	-1,5	-1,86	-2,14	-2,34	-2,46	-2,5	-2,46	-2,34	-2,14	-1,86	-1,5
9	1,1	-0,77	-1,29	-1,73	-2,09	-2,37	-2,57	-2,69	-2,73	-2,69	-2,57	-2,37	-2,09	-1,73
10	1,2	-0,98	-1,5	-1,94	-2,3	-2,58	-2,78	-2,9	-2,94	-2,9	-2,78	-2,58	-2,3	-1,94
11	1,3	-1,14	-1,66	-2,1	-2,46	-2,74	-2,94	-3,06	-3,1	-3,06	-2,94	-2,74	-2,46	-2,1
12	1,4	-1,27	-1,79	-2,23	-2,59	-2,87	-3,07	-3,19	-3,23	-3,19	-3,07	-2,87	-2,59	-2,23
13	1,5	-1,35	-1,87	-2,31	-2,67	-2,95	-3,15	-3,27	-3,31	-3,27	-3,15	-2,95	-2,67	-2,31
14	1,6	-1,39	-1,91	-2,35	-2,71	-2,99	-3,19	-3,31	-3,35	-3,31	-3,19	-2,99	-2,71	-2,35
15	1,7	-1,38	-1,9	-2,34	-2,7	-2,98	-3,18	-3,3	-3,34	-3,3	-3,18	-2,98	-2,7	-2,34
16	1,8	-1,32	-1,84	-2,28	-2,64	-2,92	-3,12	-3,24	-3,28	-3,24	-3,12	-2,92	-2,64	-2,28
17	1,9	-1,21	-1,73	-2,17	-2,53	-2,81	-3,01	-3,13	-3,17	-3,13	-3,01	-2,81	-2,53	-2,17
18	2	-1,04	-1,56	-2	-2,36	-2,64	-2,84	-2,96	-3	-2,96	-2,84	-2,64	-2,36	-2
19	2,1	-0,81	-1,33	-1,77	-2,13	-2,41	-2,61	-2,73	-2,77	-2,73	-2,61	-2,41	-2,13	-1,77
20	2,2	-0,52	-1,04	-1,48	-1,84	-2,12	-2,32	-2,44	-2,48	-2,44	-2,32	-2,12	-1,84	-1,48
21	2,3	-0,16	-0,68	-1,12	-1,48	-1,76	-1,96	-2,08	-2,12	-2,08	-1,96	-1,76	-1,48	-1,12
22	2,4	0,27	-0,25	-0,69	-1,05	-1,33	-1,53	-1,65	-1,69	-1,65	-1,53	-1,33	-1,05	-0,69
23	2,5	0,77	0,25	-0,19	-0,55	-0,83	-1,03	-1,15	-1,19	-1,15	-1,03	-0,83	-0,55	-0,19
24	2,6	1,35	0,83	0,39	0,03	-0,25	-0,45	-0,57	-0,61	-0,57	-0,45	-0,25	0,03	0,39

Рисунок 1.18 – Таблица с подготовленными данными для построения графика функции двух переменных

2) Выделяем ячейки с данными для диаграммы вместе с подписями и заголовками столбцов, т.е. диапазон A1:N24;

3) Выполняем команду: вкладка **Вставка**/ **Диаграммы/ Другие/ Поверхность.** Получаем график поверхности для заданной функции (рисунок 1.19).

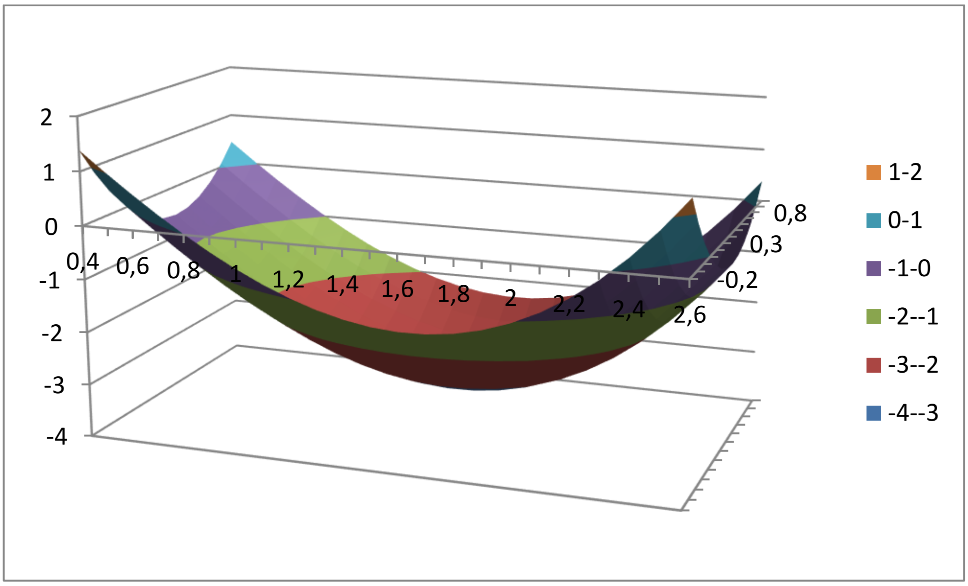


Рисунок 1.19 –График поверхности для заданной функции двух переменных

Построенный график поверхности можно редактировать и форматировать с помощью команд вкладок **Работа с диаграммами**/ **Конструктор**, **Макет** и **Формат** или пользуясь контекстным меню для отдельных элементов диаграммы.

2 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙИ ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ В MICROSOFTEXCEL

В практике использования Excel для решения инженерных и экономических задач широкое применение находят надстройки, предназначенные для поиска решения уравнений и оптимизационных задач.

*2.1 Использование надстройки **Подбор параметра** для нахождения корней уравнений*

Простым и удобным инструментом решения уравнений является надстройка **Подбор параметра**. Она использует численные методы решения уравнения, зависящего от одной или нескольких переменных.

Для решения уравнения с помощью данного метода нужно:

1 задать на рабочем листе ячейки, содержащие переменные решаемого уравнения (**влияющие** ячейки);
2 задать на рабочем листе ячейку, содержащую формулу уравнения (**зависимую** или **целевую** ячейку);
3 в диалоговое окно **Подбор параметра** ввести целевую и влияющие ячейки;
4 получить ответ.

В некоторых случаях может возникнуть сообщение об отсутствии решения или о невозможности его найти. Это связано с математическими аспектами. Во-первых, уравнение может просто не иметь решений, а во-вторых, алгоритм, лежащий в основе данного метода, может в тех или иных условиях оказаться расходящимся.

Рассмотрим примеры использования надстройки **Подбор параметра**.

<u>Пример 2.1</u>. Решение экономической задачи сводится к решению уравнения $2+\dfrac{15}{x}=x$. Найти решение данного уравнения.

Решение.

1 Привести уравнение к такому виду, чтобы в правой его части было только число. В результате получаем уравнение $\dfrac{15}{x}-x=-2$.
2 Ввести начальное приближение влияющей переменной в ячейку B1.
3 В ячейку B3 ввести формулу уравнения (задать целевую функцию). Пример заполнения ячеек B1 и B3 приведен на рисунке 2.1.

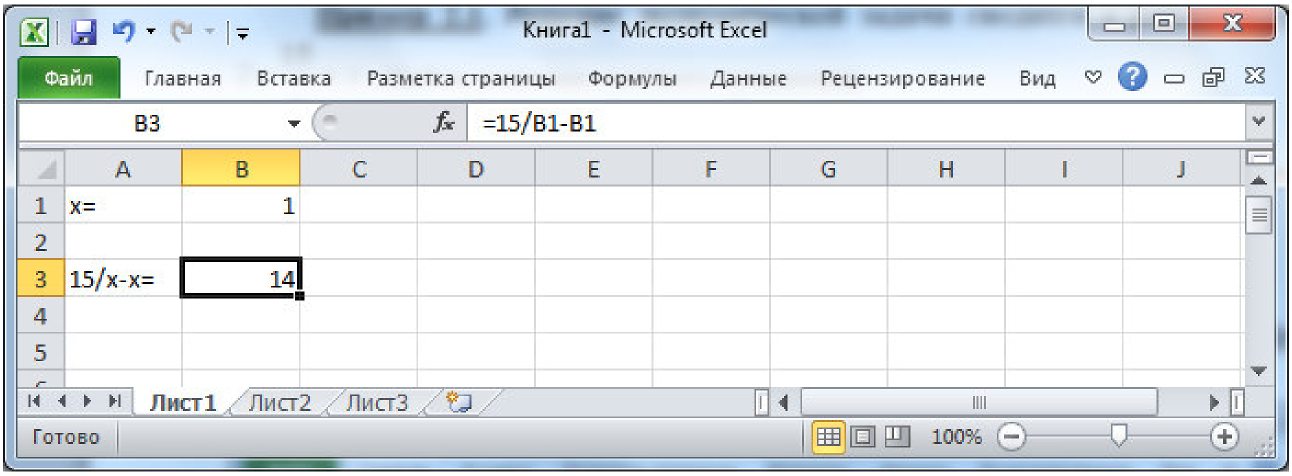


Рисунок 2.1 - Пример заполнения ячеек исходными данными для решения уравнения

4 Вызвать диалоговое окно **Подбор параметра**, выполнив команду: вкладка **Данные/ Работа с данными/ Анализ “что если”/ Подбор параметра**.
5 Ввести значения в окно **Подбор параметра** (рисунок 2.2).
6 Нажать на кнопку ОК для выполнения процедуры подбора параметра.

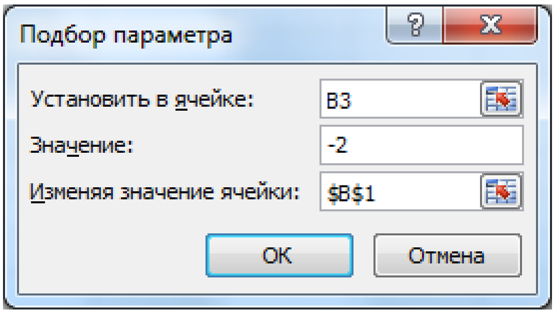


Рисунок 2.2 - Ввод значений в окне ***Подбор параметра***

7 Проанализировать результат подбора параметра (рисунок 2.3) и нажать на кнопку ОК.

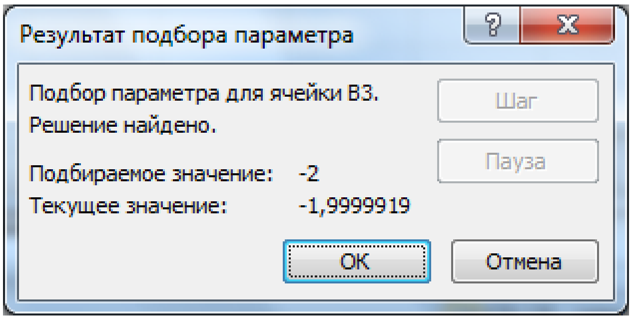


Рисунок 2.3 - Результат решения уравнения путем подбора параметра.

8 Проанализировать изменение содержания влияющих ячеек после решения уравнения (рисунок 2.4).

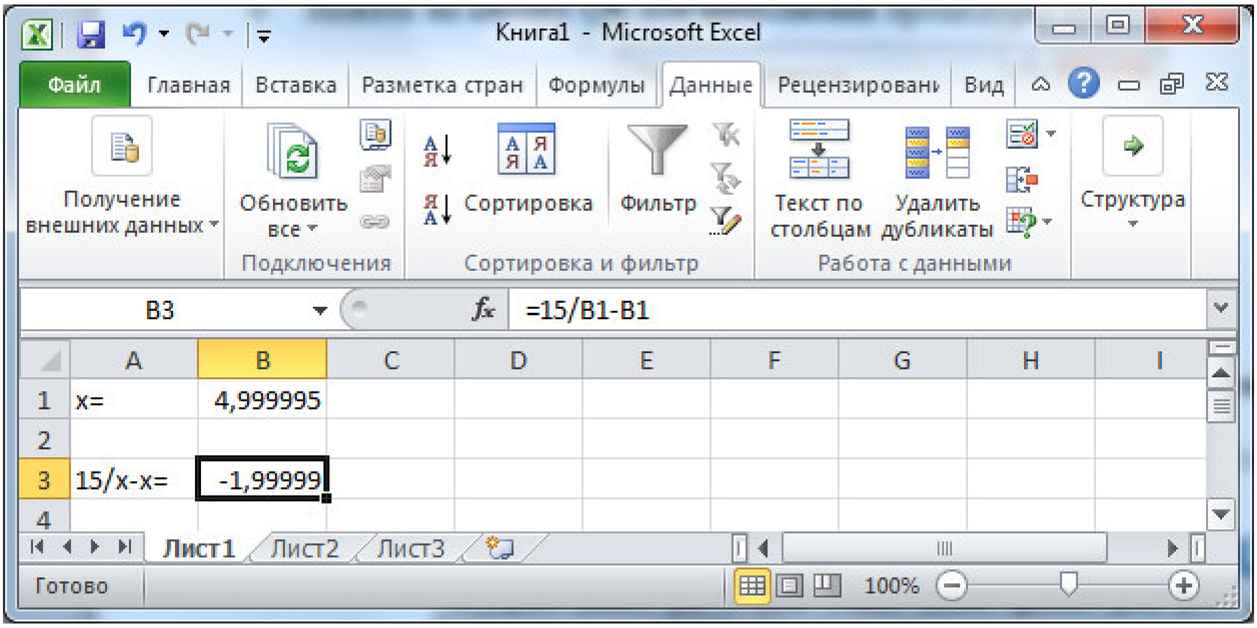


Рисунок 2.4 - Изменение содержания влияющих ячеек после решения уравнения

Если рассматриваемое уравнение имеет несколько корней или бесконечное множество решений, то результат подбора будет зависеть от начального приближения влияющих переменных.

Чтобы определить начальное значение влияющей переменной бывает полезно исследовать поведение функции, а также построить её график.

Так как инструмент **Подбор параметра** очень прост, то и возможности его ограниченны. Поэтому с помощью данного инструмента могут быть решены только отдельно взятые уравнения.

*2.2 Поиск экстремумов функций с помощью надстройки **Поиск решения***

Для отыскания корней уравнений в Excel также может быть использована надстройка **Поиск решения**. При этом необходимо выполнить те же самые действия, что и при использовании надстройки **Подбор параметра**. Но обычно надстройка **Поиск решения** применяется для нахождения оптимальных решений, т.е. для поиска экстремумов функций.

<u>Пример 2.2</u>. Найти координаты точки минимума функции двух переменных

$f(x,y) = 0{,}5\cdot x^3 + 4\cdot y^2 - 4\cdot x - 4\cdot y + 2$ для $0.4 \le x \le 2.6$, $-0.2 \le y \le 1$

Решение.

1) На листе Excel в ячейках B1 и B2 (рисунок 2.5) введём начальные приближения для переменных *x* и *y* из заданных для них по условию задачи (или каких-либо иных соображений) диапазонов. В ячейку B3 введём формулу для заданной функции, используя ссылки на ячейки, содержащие начальные значения для входящих в неё переменных.

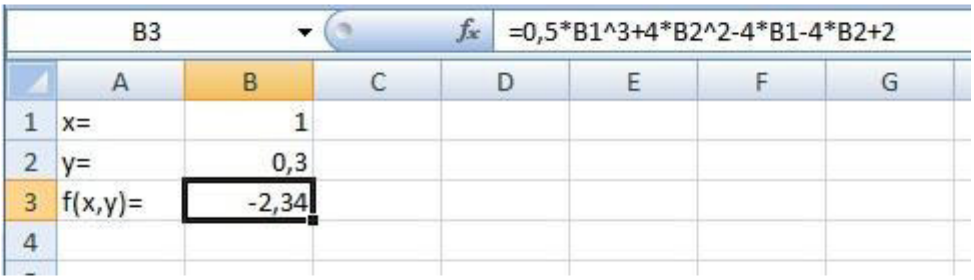


Рисунок 2.5 –Лист Excel с заданными начальными значениями для переменных x и y и формулой для функции

2) Делаем активной ячейку B3 (с целевой функцией) и выполняем команду вкладка **Данные/ Анализ/ Поиск решения**.

3) В открывшемся окне **Поиск решения** (рисунок 2.6) устанавливаем необходимые параметры поиска – в нашем примере мы ищем минимум функции. В поле Изменяя ячейки задаём ссылки на ячейки, содержащие начальные приближения для переменных, от которых зависит заданная функция.

При необходимости с помощью кнопки Добавить можно добавить ограничения для варьируемых переменных.

Чтобы получить результат, щелкаем по кнопке Выполнить.

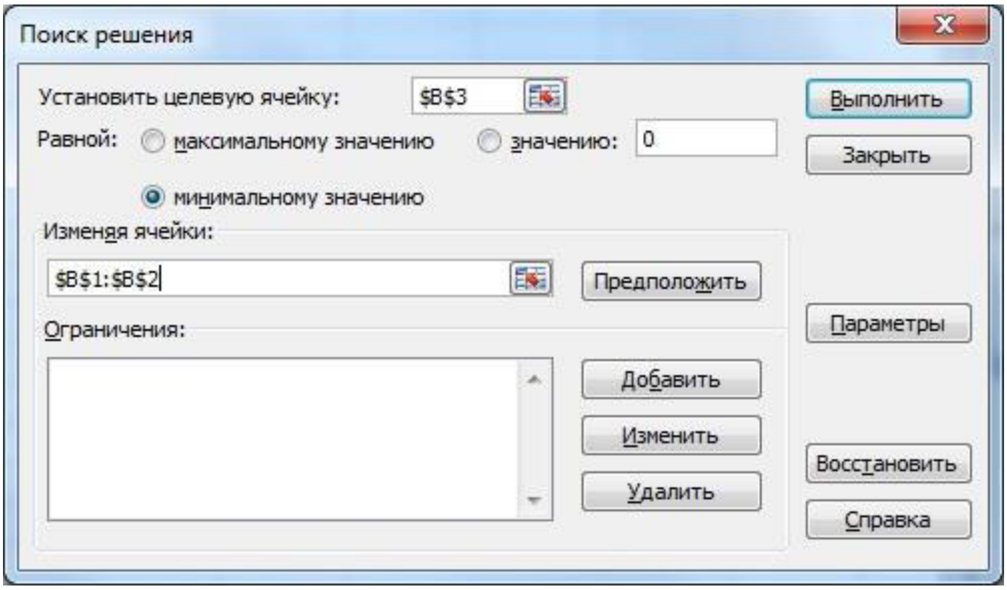


*Рисунок 2.6 – Окно **Поиск решения** с заданными параметрами поиска*

На рисунке 2.7 представлены результаты решения этой задачи.

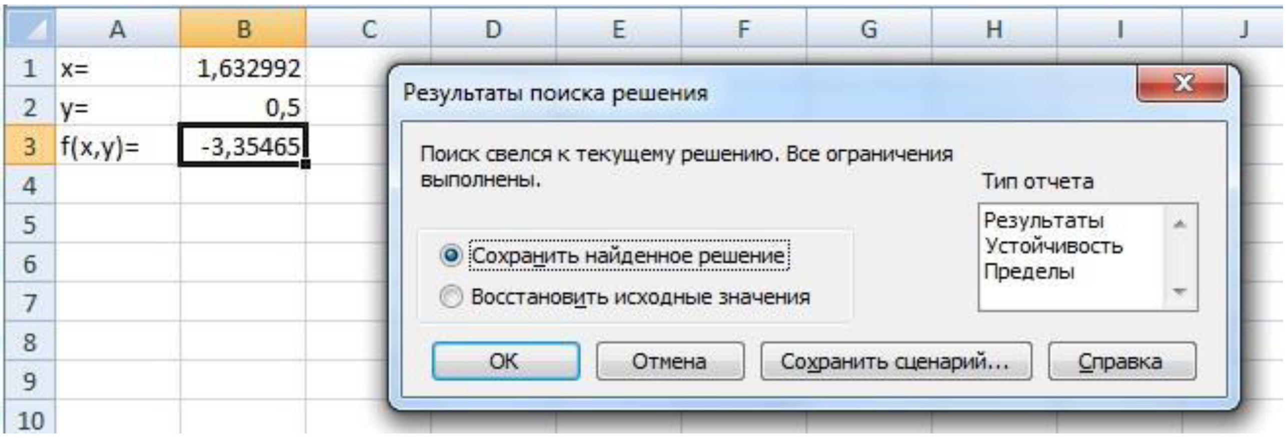


Рисунок 2.7 – Результаты поиска координат точки минимума функции

3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ

3.1 Постановка задачи аппроксимации

В экономике и технике часто возникает задача подбора функциональной зависимости для двух наборов данных. Независимые переменные ***x*** называют факторами, а зависимые ***y*** — откликами. Функция ***y = f(x)*** позволяет предсказывать значение отклика для факторов, не входящих в исходную совокупность.

Так как задача отыскания функциональной зависимости очень важна, в Excel введен набор функций, которые позволяют решать эту задачу. Эти функции основаны на методе наименьших квадратов. Но регрессионный анализ — это не только метод наименьших квадратов. Относительно исходных данных делаются некоторые статистические предположения. В качестве результата выдаются не только коэффициенты функции, приближающей данные, но и статистические характеристики полученных результатов.

Рассмотрим основные функции, используемые для регрессионного анализа.

3.2 Линейная регрессия

Пусть известно, что полученные наборы экспериментальных данных $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ описываются линейной зависимостью общего типа:

$y = m \cdot x + b$

Задача состоит в нахождении параметров этой зависимости, т. е. в вычислении коэффициентов m и b.

Коэффициенты m и b можно вычислить с помощью функций НАКЛОН и ОТРЕЗОК (из категории *Статистические*). Названия этих функций отвечают геометрическому смыслу коэффициентов регрессии: m — это тангенс угла наклона прямой регрессии к оси абсцисс, а b — отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат.

Функция **НАКЛОН(известные_значения_y; известные_значения_x)** и функция **ОТРЕЗОК(известные_значения_y; известные_значения_x**) имеют одинаковый набор аргументов.

Известные_значения_y - это массив или интервал ячеек, содержащих числовые зависимые точки данных.

Известные_значения_x - это множество независимых точек данных.

Аргументы функций должны быть числами или именами, массивами или ссылками, содержащими числа. Если аргумент, который является массивом или ссылкой, содержит тексты, логические значения или пустые ячейки, то такие значения игнорируются; однако, ячейки с нулевыми значениями учитываются.

Если **известные_значения_y** и **известные_значения_x** пусты или содержат различное число точек данных, то функции возвращают значение ошибки #Н/Д.

Рассмотрим решение задачи линейной регрессии с помощью функций НАКЛОН и ОТРЕЗОК на примере.

Пример 3.1. Дан набор экспериментальных данных $X_i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $Y_i = \{3, 1, 6, 3, 7\}$. Найти коэффициенты m и b прямой линии $y = m \cdot x + b$, наилучшим образом аппроксимирующей эти данные.

Решение.

1 Ввести массив X_i диапазон A2:A6.

2 Ввести массив Y_i диапазон B2:B6.

На рисунке 3.1. приведен фрагмент листа Excel решения задачи из примера 3.1.

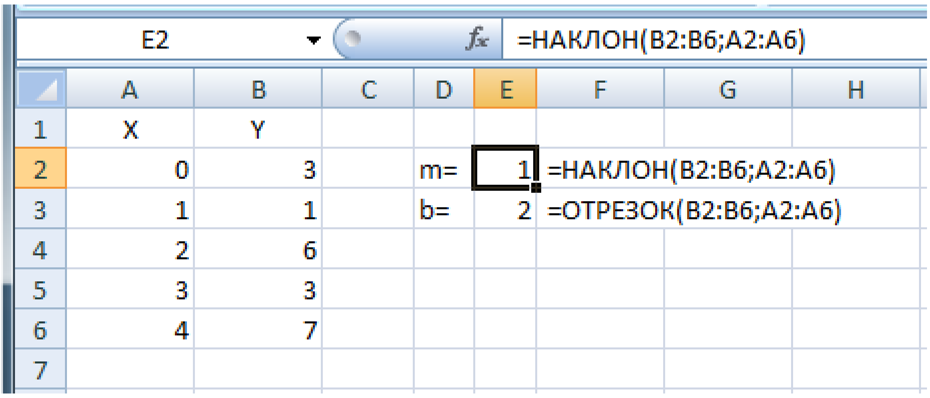


Рисунок 3.1 - Использование функций НАКЛОН и ОТРЕЗОК для вычисления коэффициентов регрессионной прямой

При решении некоторых задач для прогнозирования дальнейших значений откликов можно не вычислять коэффициенты регрессионного уравнения, поскольку они нужны для оценки откликов для старых и новых значений факторов (старые значения — те, на основе которых вычислялось уравнение регрессии). Для этого служат две функции: ТЕНДЕНЦИЯ и ПРЕДСКАЗ.

Функция **ТЕНДЕНЦИЯ(известные_значения_y; известные_значения_x; новые_значения_x; конст)** возвращает значения в соответствии с линейным трендом. Аппроксимирует прямой линией (по методу наименьших квадратов) массивы **известные_значения_y** и **известные_значения_x**. Возвращает значения **y**, в соответствии с этой прямой для заданного массива **новые_значения_x**.

Функция **ПРЕДСКАЗ(x; известные_значения_y; известные_значения_x)** вычисляет или предсказывает будущее значение по существующим значениям. Предсказываемое значение - это y-значение, соответствующее заданному x-значению.

Пример 3.2.

В таблице 3.1 приведены две соответствующие величины: процент углерода в металле и производительность печи (т/ч).

Построить диаграмму зависимости производительности печи от процента углерода. На диаграмме получить линию тренда и уравнение регрессии.

Используя функции НАКЛОН и ОТРЕЗОК, определить угловой и свободный коэффициенты уравнения регрессии двумя способами.

Тремя способами дать приблизительную оценку производительности печи при проценте углерода в металле равном 0,97.

Таблица 3.1 - Зависимость производительности печи от процента углерода в металле.

№ анализа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Процент углерода в металле	0,95	0,98	0,65	0,94	0,99	0,78	0,82	1,12	0,92	1,12	1,00	1,13
Производительность печи, т/ч	16,3	16,0	17,3	16,5	16,0	17,0	16,7	15,8	16,4	15,7	16,0	15,9

Решение.

1 В ячейки A2:M4 ввести исходные данные (рисунок 3.4).

2 Выделить диапазон A3:M4 и построить *точечную* диаграмму зависимости производительности печи от процента углерода.

3 Для получения линии тренда в контекстном меню одной из точек диаграммы выбрать опцию «Добавить линию тренда…» (рисунок 3.2).

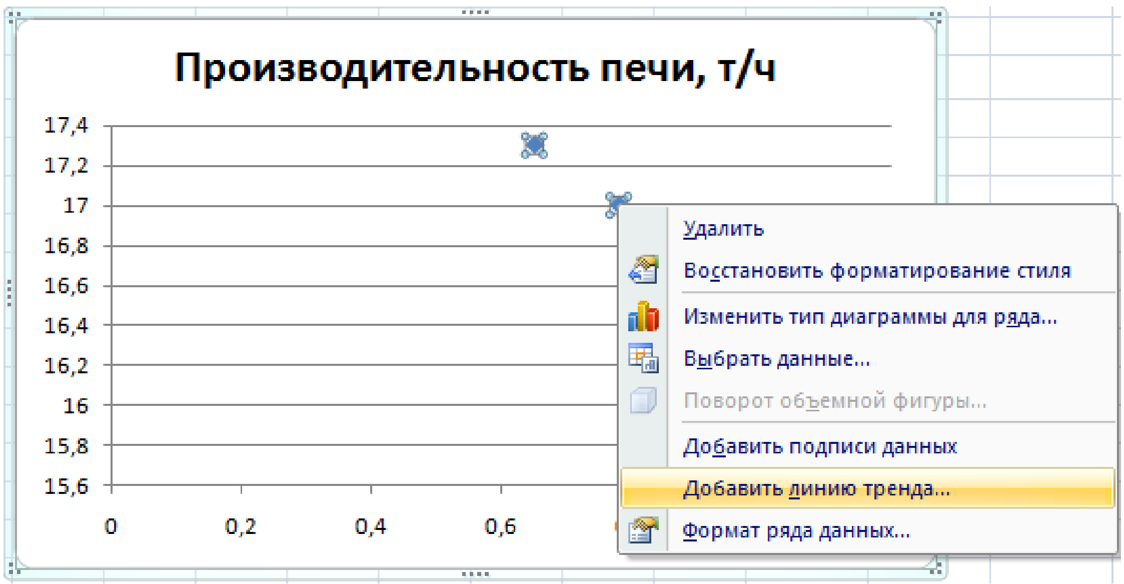


Рисунок 3.2 - Вызов контекстного меню для получения линии тренда

4 В диалоговом окне «**Формат линии тренда**» на вкладке «**Параметры линии тренда**» выбрать переключатель «Линейная» (рисунок 3.3).

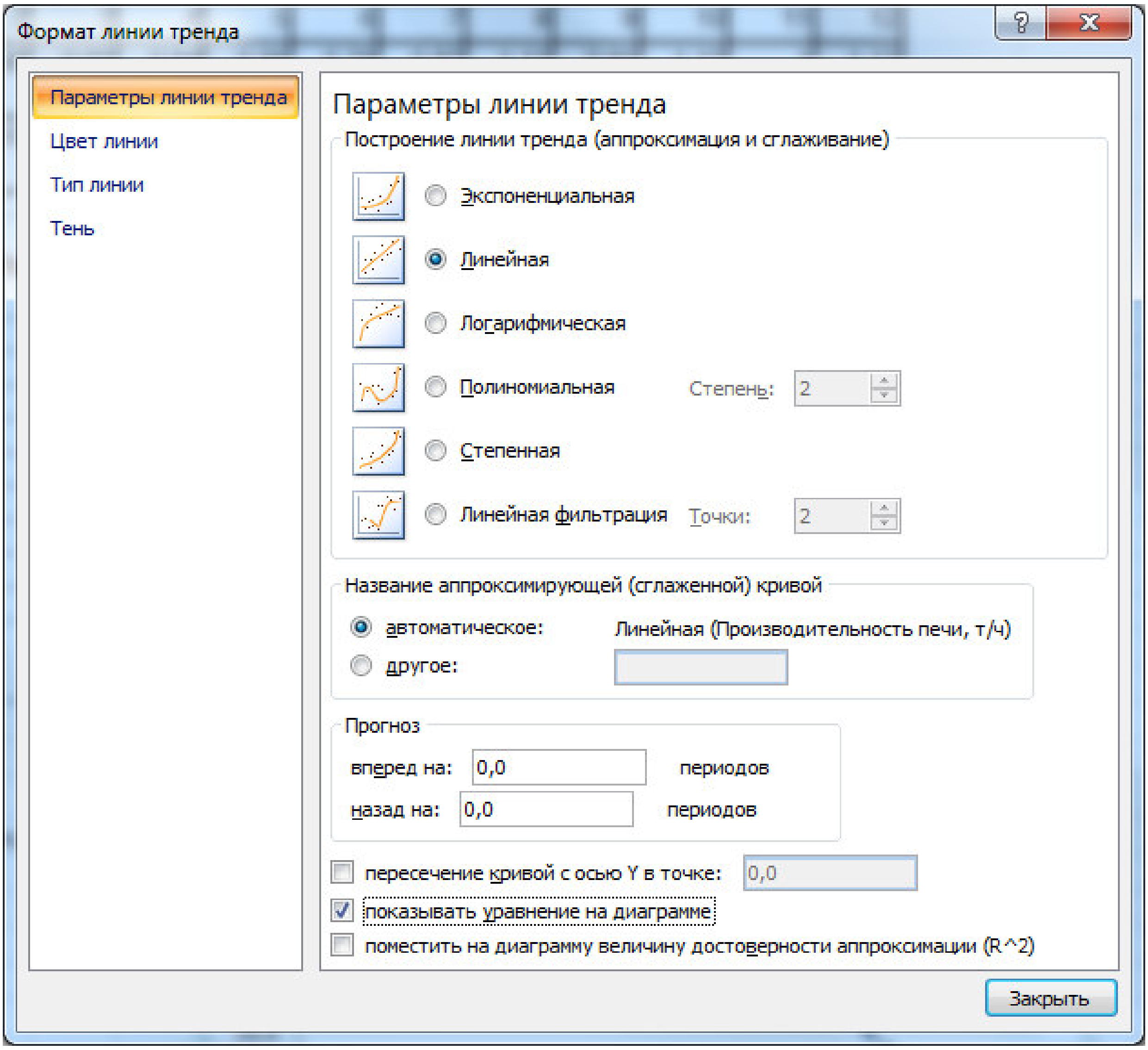


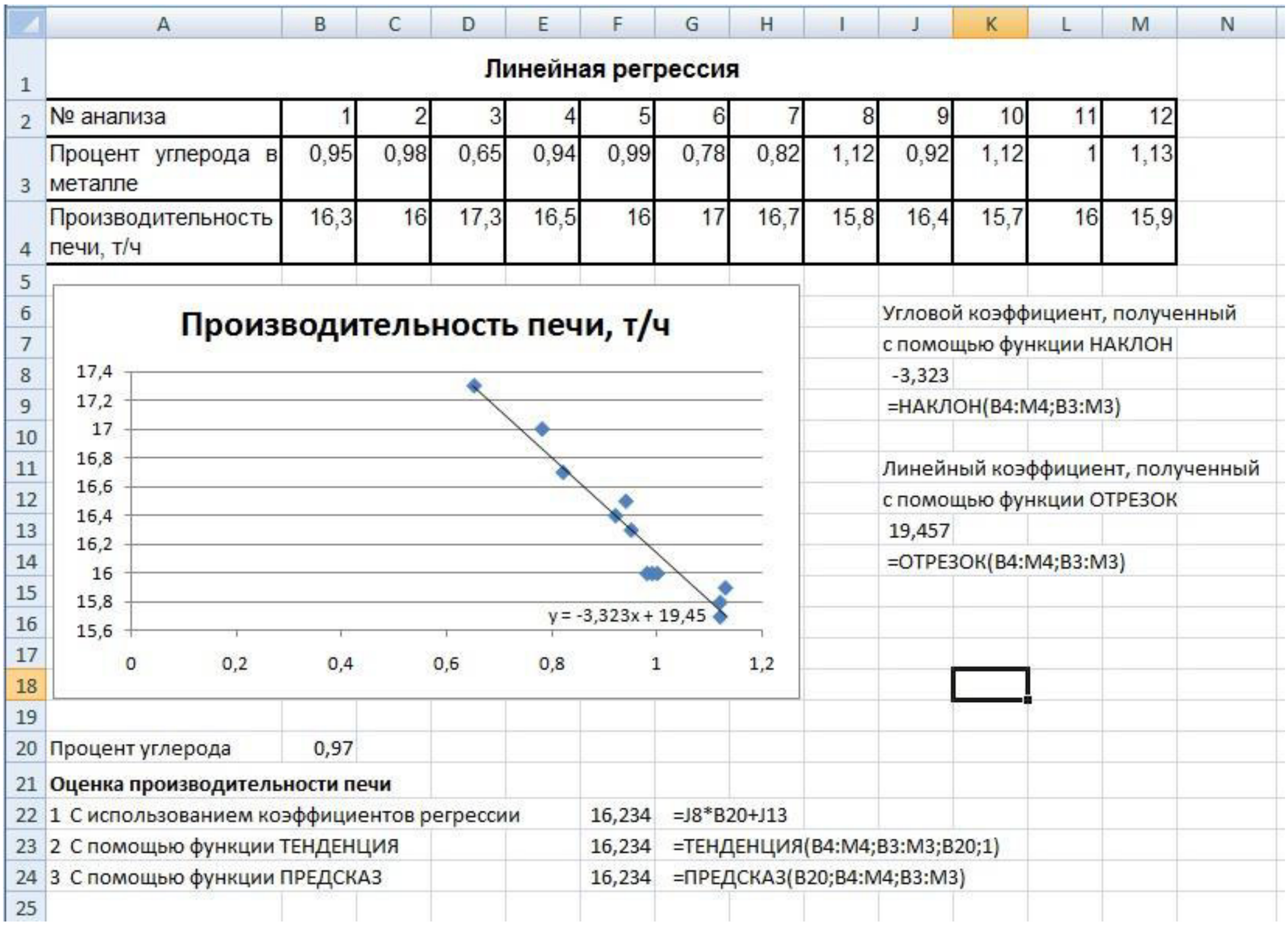
Рисунок 3.3 - Выбор типа линии тренда

5 Для получения уравнения регрессии на диаграмме в диалоговом окне «**Формат линии тренда**» на вкладке «**Параметры линии тренда**» активировать флажок «показывать уравнение на диаграмме» (рисунок 3.3).

6 Нажать кнопку Закрыть.

7 Определить угловой коэффициент с помощью функции НАКЛОН. Для этого:

- выделить ячейку J8;
- в мастере функций выбрать функцию НАКЛОН;
- заполнить аргументы функции так, как показано на рисунке 3.4;
- завершить ввод формулы нажатием на кнопку ОК.



№ анализа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Процент углерода в металле	0,95	0,98	0,65	0,94	0,99	0,78	0,82	1,12	0,92	1,12	1	1,13
Производительность печи, т/ч	16,3	16	17,3	16,5	16	17	16,7	15,8	16,4	15,7	16	15,9

Рисунок 3.4 - Пример использования функций регрессионного анализа (линейная регрессия)

8 Определить линейный коэффициент с помощью функции ОТРЕЗОК. Для этого:

- выделить ячейку J13;
- в мастере функций выбрать функцию ОТРЕЗОК;
- заполнить аргументы функции так, как показано на рисунке 3.4;
- завершить ввод формулы нажатием на клавишу ОК.

9 в ячейку B20 ввести значение процента углерода в металле, для которого надо произвести оценку производительности печи.

10 произвести оценку производительности различными способами.

- **1 способ**. С помощью полученных коэффициентов регрессии. Для такой оценки в ячейку F22 надо ввести формулу **=J8*B20+J13**. Эта формула получена в соответствии с линейной зависимостью.
- **2 способ**. С помощью функции ТЕНДЕНЦИЯ. Для оценки в ячейке F23 с помощью мастера функций надо ввести формулу **=ТЕНДЕНЦИЯ(B4:M4;B3:M3;B20;1).**

- **<u>3 способ</u>**. С помощью функции ПРЕДСКАЗ. Для оценки в ячейке F24 с помощью мастера функций надо ввести формулу **=ПРЕДСКАЗ(B20;B4:M4;B3:M3)**.

Полный вариант решения задачи приведен на рисунке 3.4.

Задача регрессии включена в "Пакет анализа". Если выбрать на вкладке **Данные**/ **Анализ данных**/ **Регрессия**, то можно получить при решении задачи регрессионного анализа намного больше статистической информации.

3.3 Нелинейная зависимость

В очень редких случаях линейная регрессия даёт лучшее приближение для полученных экспериментальных данных. Для определения вида зависимости, описывающей экспериментальные точки $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, i=1, 2, …, n, полезно построить график (<u>точечный график!</u>). Вид зависимости может быть задан по условию задачи, или можно подобрать его, глядя на график. Далее рассмотрим способы определения параметров полученной зависимости некоторого вида.

3.3.1 Использование линии тренда для нахождения коэффициентов нелинейной аппроксимирующей зависимости

В Microsoft Excel включены средства построения некоторых наиболее часто встречающихся типов нелинейной регрессии, таких как: логарифмической, полиномиальной, степенной и экспоненциальной регрессий, а также построение зависимости скользящего среднего.

<u>Пример 3.2</u>.

Менеджер по закупкам отдела «Книга-почтой» недавно разослал клиентам новый каталог, рекламирующий роман, получивший очень высокую оценку критиков. Менеджер считает, что следует заранее заказать дополнительное количество экземпляров, чтобы не оказаться в ситуации, когда книга закончится раньше, чем перестанут приходить заявки на нее. Менеджер начал отслеживать ежедневные заказы на роман, и регистрировать недельные объемы продаж. Результаты наблюдений приведены в таблице 3.2.

Требуется спрогнозировать необходимый менеджеру объем заказа на книгу на ближайшие 4 недели с помощью полиномиальной зависимости.

Таблица 3.2 - Недельные объемы продаж книг.

Неделя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем продаж	1	1	4	5	10	19	34	55	84	120

Решение:

1 В ячейки A2:B12 введём исходные данные (рисунок 3.5).

2 Построим точечную диаграмму зависимости объёмов продаж от номера недели.

3 Для получения линии тренда в контекстном меню одной из точек диаграммы выберем опцию «Добавить линию тренда…».

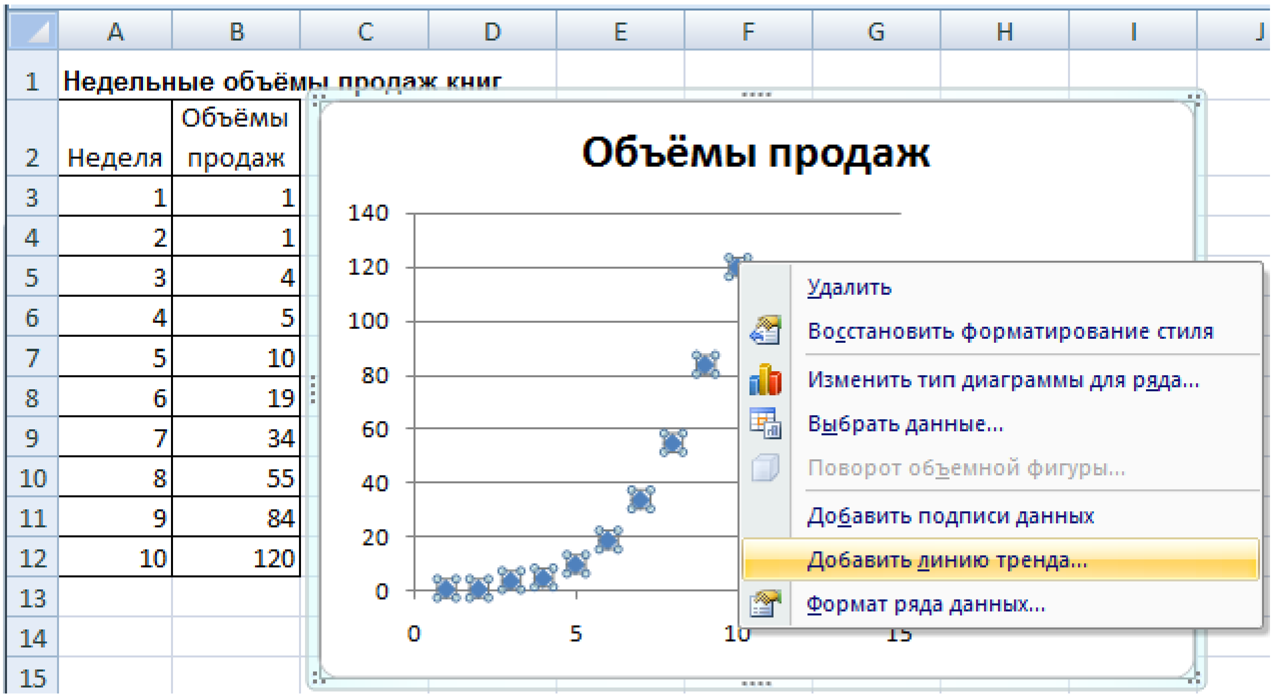


Рисунок 3.5–Ввод исходных данных в таблицу Excel и отображение их на графике

4 В диалоговом окне «**Формат линии тренда**» на вкладке «**Параметры линии тренда**» выберем тип диаграммы (рисунок 3.3). Microsoft Excel позволяет построить линию тренда для следующих зависимостей:

- Линейная $y = a*x + b$;
- Логарифмическая $y=a*\ln(x)+b$;
- Полиномиальная $y = a*x2 + b*x + c$ (можно задать порядок) – *выберем для данного примера*;
- Степенная $y = a*x^b$;
- Экспоненциальная $y = a*e^{bx}$;
- Линейная фильтрация по заданному числу точек.

5 На вкладке «**Параметры линии тренда**» можно задать название аппроксимирующей кривой.

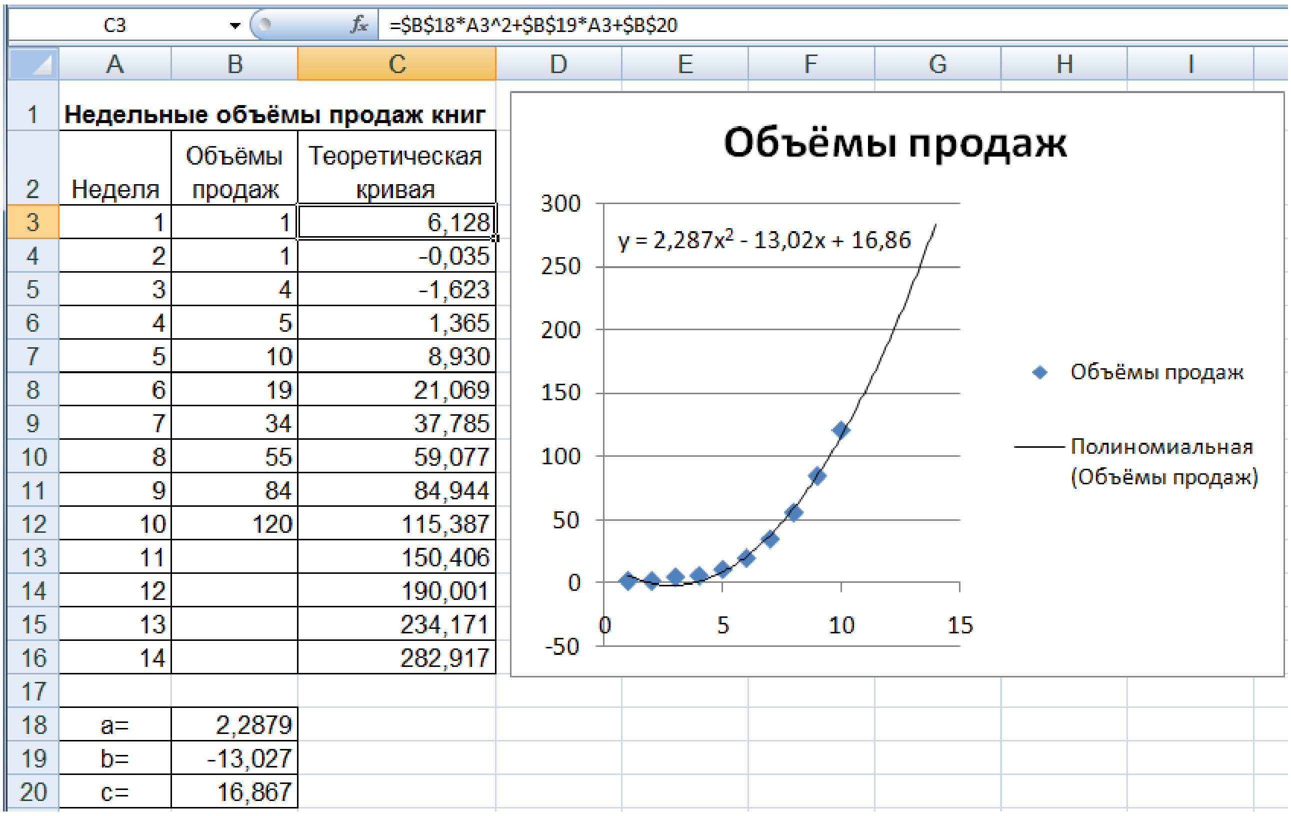
Для получения уравнения регрессии на диаграмме активируем флажок «показывать уравнение на диаграмме» (рисунок 3.3).

При необходимости можно задать прогноз нужного количества значений.

6 По окончании выбора всех параметров щёлкаем кнопку ОК.

7 Полученные коэффициенты полиномиальной зависимости запишем соответственно в ячейки B18, B19 и B20 (рисунок 3.6).

8 В колонке С, используя найденные коэффициенты, получим значения для теоретической кривой с прогнозом на следующие 4 недели (рисунок 3.6).



C3 =$B$18*A3^2+$B$19*A3+$B$20

	A	B	C
1	**Недельные объёмы продаж книг**		
2	Неделя	Объёмы продаж	Теоретическая кривая
3	1	1	6,128
4	2	1	-0,035
5	3	4	-1,623
6	4	5	1,365
7	5	10	8,930
8	6	19	21,069
9	7	34	37,785
10	8	55	59,077
11	9	84	84,944
12	10	120	115,387
13	11		150,406
14	12		190,001
15	13		234,171
16	14		282,917
17			
18	a=	2,2879	
19	b=	-13,027	
20	c=	16,867	

Рисунок 3.6 – Результаты решения задачи аппроксимации полиномиальной зависимостью

3.3.2 Нахождение коэффициентов нелинейной аппроксимирующей зависимости путём сведения её к линейной. Выбор лучшей аппроксимирующей зависимости.

Пусть известно, что полученные экспериментальные данные $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, i=1,2, …, n описываются нелинейной зависимостью общего вида:

$y = f(x, a, b)$

Задача состоит в нахождении параметров этой зависимости, т. е. в вычислении коэффициентов a и b.

Часто нелинейная зависимость путём элементарных математических преобразований может быть сведена к линейной. В этом случае для вычисления коэффициентов в Excel можно будет воспользоваться функциями НАКЛОН(…) и ОТРЕЗОК(…), рассмотренными ранее.

Основные виды нелинейных зависимостей, сводящихся к линейным

1) $y = a \cdot b^x$ - показательная функция;

2) $y = a \cdot e^{b \cdot x}$ – экспоненциальная зависимость;

3) $y = \dfrac{1}{a \cdot x + b}$ - дробно-линейная функция;

4) $y = a \cdot ln(x) + b$ - логарифмическая функция;

5) $y = a \cdot x^b$ - степенная функция;

6) $y = a + \dfrac{b}{x}$ - гиперболическая функция;

7) $y = \dfrac{x}{a \cdot x + b}$ - дробно-рациональная функция.

Приёмы сведения нелинейной зависимости к линейной

На следующем примере рассмотрим некоторые приёмы сведения нелинейных зависимостей к линейной.

<u>Пример 3.3</u>.

Известно, что приведённые в таблице экспериментальные данные $\{x\}, \{y\}$

x	2	3,5	5	6	7
y	4,53	3,12	2,7	1,88	1,55

могут быть описаны с помощью следующих теоретических зависимостей общего вида:

$y1(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$

$y2(x) = \dfrac{c}{x+d}$

1 Определить, какая из предложенных теоретических зависимостей наилучшим образом описывает набор экспериментальных данных $\{x\}, \{y\}$, для чего:

а) вычислить параметры каждой теоретической зависимости;

б) вычислить сумму квадратов отклонений для каждой зависимости;

в) отобразить на графиках (отдельно для каждой зависимости) экспериментальные точки и теоретические зависимости;

2 Предсказать значение Y при X = 11. Показать соответствующие точки на графиках.

Решение.

<u>*Для первой зависимости:*</u>

$y1(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$

Чтобы от произведения перейти к сумме и избавиться от возведения числа e в степень – прологарифмируем обе части выражения. Получим:

$ln(y) = ln(a) + b \cdot x$

Затем, выполним замену переменных:

$z = ln(y), \;\; c = ln(a)$,

сводим зависимость к линейной:

$z = c + x \cdot b$.

Далее в Excel с помощью функций НАКЛОН и ОТРЕЗОК найдём коэффициенты c и b.

Затем вычислим коэффициент a: $a = exp(c)$.

<u>Решение в Excel:</u>

1 В ячейки A2:B7 введём исходные данные (рисунок 3.7).

2 В ячейку C3 введём формулу =LN(B3) и скопируем её в ячейки C4:C7.

3 Для вычисления коэффициента a в ячейку B11 введём формулу =EXP(ОТРЕЗОК(C3:C7;A3:A7)).

4 Для вычисления коэффициента b в ячейку B12 введём формулу =НАКЛОН(C3:C7;A3:A7).

5 Для вычисления квадратов отклонений заданной зависимости от экспериментальных данных в ячейку D3 введём формулу =($B$11*EXP($B$12*A3)-B3)^2 и скопируем её в ячейки D4:D7.

6 В ячейке D8 вычислим сумму квадратов отклонений: =СУММ(D3:D8).

7 Для построения теоретической кривой, используя найденные коэффициенты, в ячейку E3 введём формулу =$B$11*EXP($B$12*A3) и скопируем её в ячейки E4:E7.

8 Для предсказания значения Y при X=11 в ячейку A9 введём 11, а в ячейку E11 скопируем полученную формулу.

E3 | f_x =$B$11*EXP($B$12*A3)

	A	B	C	D	E
1	y=a*e^(b*x)				
2	x	y	Ln(y)	Квадраты отклонений	Теоретическая кривая 1
3	2	4,53	1,510722	0,000	4,523
4	3,5	3,12	1,137833	0,033	3,301
5	5	2,7	0,993252	0,085	2,409
6	6	1,88	0,631272	0,005	1,953
7	7	1,55	0,438255	0,001	1,583
8			Сумма	0,124	
9	11				0,683
10					
11	a=	6,884	=EXP(ОТРЕЗОК(C3:C7;A3:A7))		
12	b=	-0,210	=НАКЛОН(C3:C7;A3:A7)		
13					

Рисунок 3.7 – Вычисление коэффициентов a и b для зависимости y1(x) = a ·e^{b·x} путём сведения её к линейной

9 Выделим диапазоны A2:B7 и E2:E7. Построим точечный график, выполнив команду: вкладка **Вставка/ Диаграмма/ Точечная**.

10 Для добавления на график предсказанного значения Y при X=11 выполним команду **Выбрать данные.** В окне **Выбор источника данных** щёлкнем по кнопке Добавить, заполним соответствующие поля (рисунок 3.8) и щёлкнем ОК.

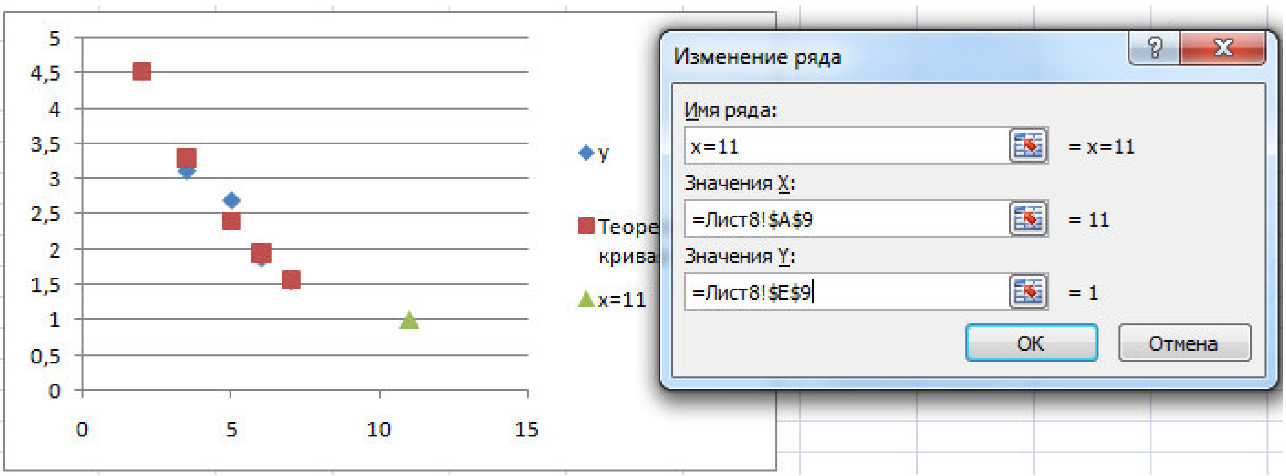
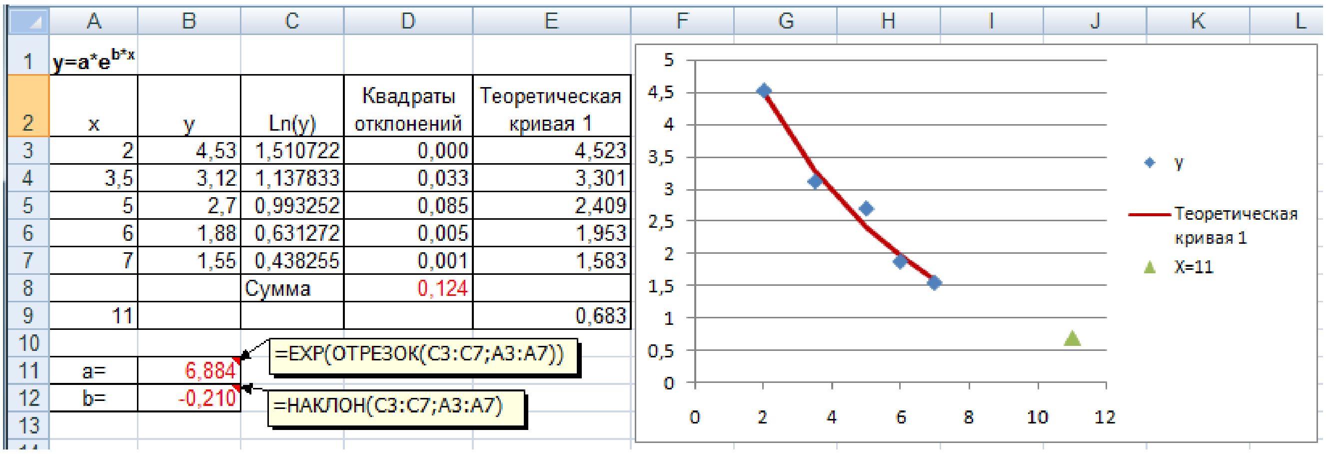


Рисунок 3.8 – Добавление на график точки с предсказанным значением

11 В окне **Выбор источника данных** щёлкнем ОК.

12 На полученном графике с помощью форматирования представим теоретическую кривую в виде гладкой линии без маркеров (рисунок 3.9).



	A	B	C	D	E
1	y=a*e^b*x				
2	x	y	Ln(y)	Квадраты отклонений	Теоретическая кривая 1
3	2	4,53	1,510722	0,000	4,523
4	3,5	3,12	1,137833	0,033	3,301
5	5	2,7	0,993252	0,085	2,409
6	6	1,88	0,631272	0,005	1,953
7	7	1,55	0,438255	0,001	1,583
8			Сумма	0,124	
9	11				0,683
10					
11	a=	6,884			
12	b=	-0,210			
13					

Рисунок 3.9 – Результат решения для первой зависимости в Excel

<u>*Для второй зависимости:*</u>

$$y2(x) = \frac{c}{x+d}$$

Чтобы свести данную зависимость к линейной перевернём обе части исходной зависимости:

$$\frac{1}{y} = \frac{x+d}{c} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{c} + \frac{d}{c}$$

и выполним замену переменных:

$$z = \frac{1}{y},\ a = \frac{1}{c},\ b = \frac{d}{c}.$$

В результате получим линейную зависимость:

$z = a \cdot x + b.$

Далее в Excel с помощью функций НАКЛОН и ОТРЕЗОК найдём коэффициенты *a* и *b, и затем* вычислим *c* и *d:*

$$c = \frac{1}{a},\ d = b \cdot c\ .$$

<u>Решение в Excel:</u>

1 В ячейки A30:B35 введём (скопируем) исходные данные (рисунок 3.10).

2 В ячейку C31 введём формулу =1/B31 и скопируем её в ячейки C32:C35.

3 Для вычисления коэффициента *c* в ячейку B39 введём формулу =1/НАКЛОН(C31:C35;A31:A35).

4 Для вычисления коэффициента *d* в ячейку B26 введём формулу =ОТРЕЗОК(C31:C35;A31:A35)*B39.

5 Для вычисления квадратов отклонений заданной зависимости от экспериментальных данных в ячейку D31 введём формулу =($B$39/(A31+$B$40)-B31)^2 и скопируем её в ячейки D32:D35.

6 В ячейке D36 вычислим сумму квадратов отклонений: =СУММ(D31:D35).

	A	B	C	D
29	y=c/(x+d)			
30	x	y	1/y	Квадраты отклонений
31	2	4,53	0,2208	0,371
32	3,5	3,12	0,3205	0,000
33	5	2,7	0,3704	0,194
34	6	1,88	0,5319	0,001
35	7	1,55	0,6452	0,009
36			Сумма	0,575
37				
38				
39	c=	12,100		
40	d=	0,355		
41				

=($B$39/(A31+$B$40)-B31)^2

=СУММ(D31:D35)

=1/НАКЛОН(C31:C35;A31:A35)

=ОТРЕЗОК(C31:C35;A31:A35)*B39

Рисунок 3.10 – Вычисление коэффициентов c и d для зависимости $y2(x)=\dfrac{c}{x+d}$ *путём сведения её к линейной*

7 Для построения теоретической кривой, используя найденные коэффициенты, в ячейку E31 введём формулу =$B$39/(A31+$B$40) и скопируем её в ячейки E32:E35 (рисунок 3.11).

8 Для предсказания значения Y при X=11 в ячейку A37 введём 11, а в ячейку E37 скопируем полученную формулу.

9 Выделим диапазоны A30:B35 и E30:E35. Построим точечный график, выполнив команду: вкладка **Вставка/ Диаграмма/ Точечная**.

10 Для добавления на график предсказанного значения Y при X=11, как и для предыдущей зависимости, выполним команду **Выбрать данные.** В окне **Выбор источника данных** щёлкнем по кнопке Добавить, заполним соответствующие поля и щёлкнем ОК.

11 В окне **Выбор источника данных** щёлкнем ОК.

12 На полученном графике с помощью форматирования представим теоретическую кривую в виде гладкой линии без маркеров (рисунок 3.11).

E31 =$B$39/(A31+$B$40)

	A	B	C	D	E
29	y=c/(x+d)				
30	x	y	1/y	Квадраты отклонений	Теоретическая кривая 2
31	2	4,53	0,2208	0,371	5,139
32	3,5	3,12	0,3205	0,000	3,139
33	5	2,7	0,3704	0,194	2,260
34	6	1,88	0,5319	0,001	1,904
35	7	1,55	0,6452	0,009	1,645
36			Сумма	0,575	
37	11				1,066
38					
39	c=	12,100			
40	d=	0,355			
41					
42					

=1/НАКЛОН(C31:C35;A31:A35)

=ОТРЕЗОК(C31:C35;A31:A35)*B39

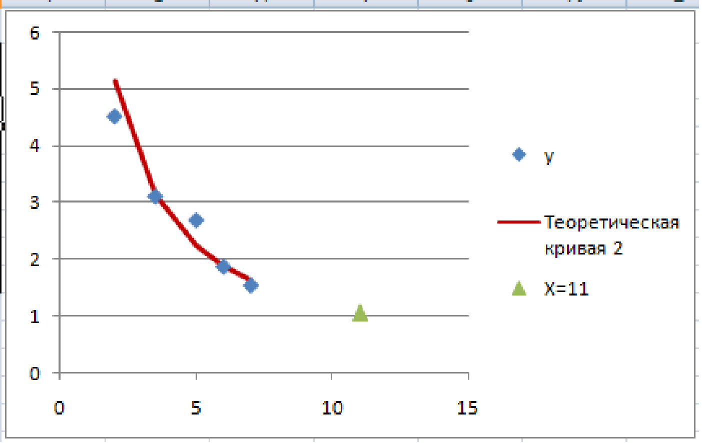


Рисунок 3.11 – Результат решения для зависимости $y2(x)=\dfrac{c}{x+d}$ *в Excel*

Выбор лучшей аппроксимирующей зависимости

Рассмотрим результаты, полученные в ходе решения задачи.

Суммы квадратов отклонений:

- для первой зависимости 0,124;
- для второй зависимости 0,575.

Лучшей аппроксимирующей зависимостью является та, сумма квадратов отклонений которой от экспериментальных данных является **наименьшей**.

Следовательно, в нашем примере, лучшей является первая зависимость

$y1(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$

3.3.3 Общий метод нахождения параметров произвольной аппроксимирующей зависимости с помощью метода наименьших квадратов и надстройки «Поиск решения»

Пусть известно, что экспериментальные данные {x} и {y} описываются некоторой зависимостью вида:

y = f(x,a,b,…)

Требуется найти коэффициенты a, b, … зависимости, наилучшим образом аппроксимирующей исходные данные.

Для отыскания неизвестных коэффициентов можно воспользоваться ***методом наименьших квадратов*** и надстройкой Поиск решения в Excel.

Согласно ***методу наименьших квадратов***, коэффициенты зависимости f(x,a,b,…) нужно выбрать такими, чтобы сумма квадратов отклонений найденной зависимости от заданных значений функции была минимальной, т.е. коэффициенты a, b, … должны минимизировать функцию:

$$\Phi(a,b,...) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i,a,b,...) - y_i)^2$$

Для вычисления значений неизвестных параметров, минимизирующих заданную зависимость, в Excel используется надстройка Поиск решения.

Пример 3.4.

Данные, представленные в примере 3.2, аппроксимировать с помощью экспоненциальной зависимости $y = a \cdot e^{b \cdot x}$.

Для вычисления коэффициентов **a** и **b** использовать метод наименьших квадратов и надстройку Поиск решения.

Отобразить на графике экспериментальные данные и полученную теоретическую кривую.

Спрогнозировать необходимый менеджеру объем заказа на книгу на 12-й неделе. Полученное значение отобразить на этом же графике в виде отдельной точки.

Решение.

1 В ячейки A2:B12 введём исходные данные, в ячейку A14 – 12 (рисунок 3.12).

2 Ячейки B16 и B17 отведём под искомые коэффициенты **a** и **b**.

3 В ячейку C3 введём формулу для вычисления квадрата отклонения заданной зависимости от экспериментальных данных в первой точке.

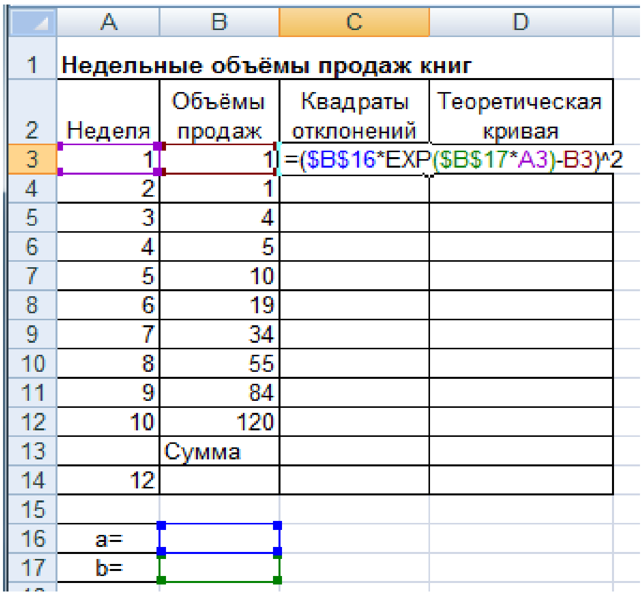


Рисунок 3.12 – Ввод исходных данных и вычисление квадратов отклонений в таблице Excel

4 Скопируем полученную формулу в ячейки С4:С12.

5 В ячейке С13 вычислим сумму по диапазону С3:С12 – сумму квадратов отклонений (рисунок 3.13).

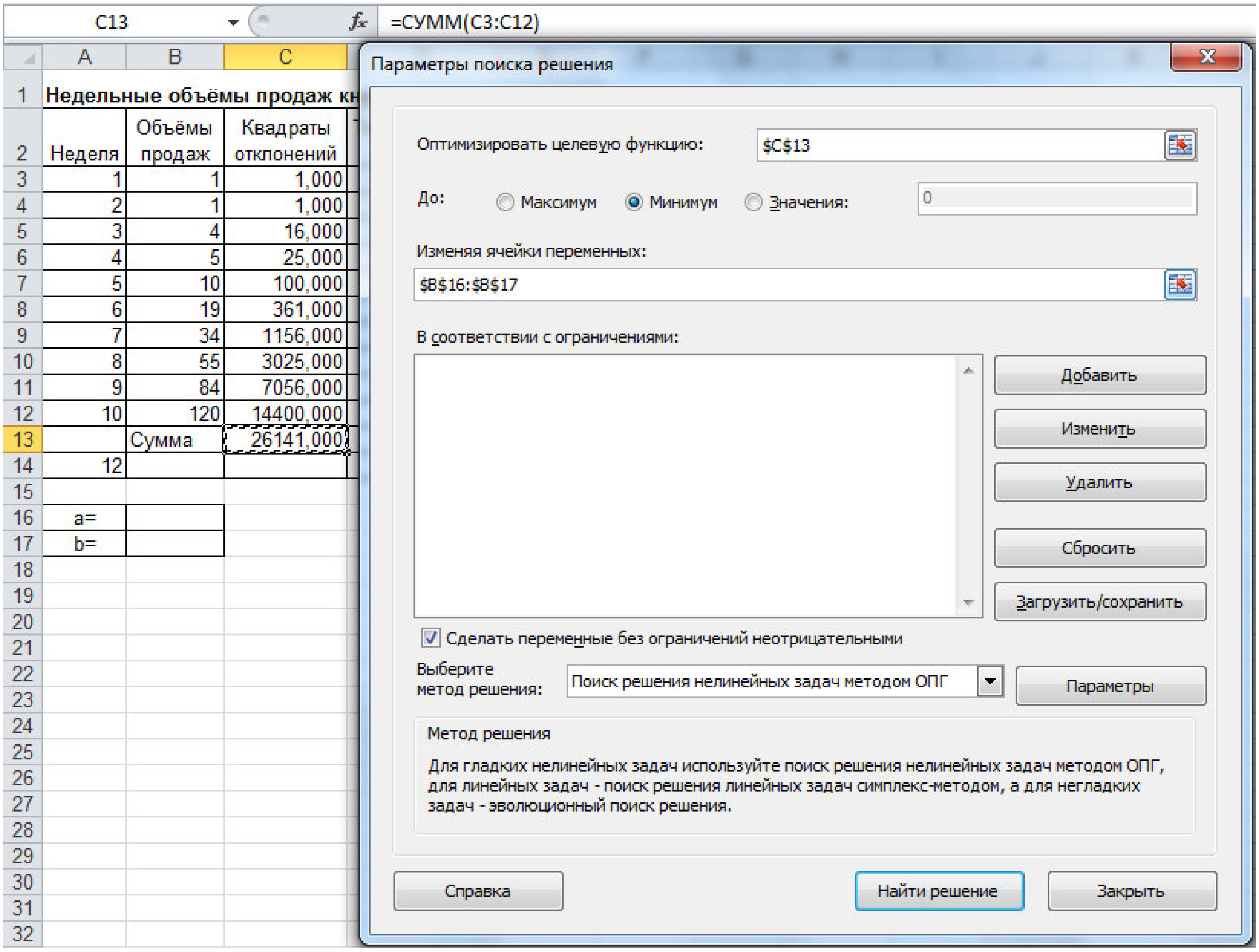


Рисунок 3.13–Заполнение окна Поиск решения *для вычисления коэффициентов **a** и **b***

6 Выделим ячейку C13 (с суммой квадратов отклонений) и выполним команду: вкладка **Данные / Поиск решения**.

7 В окне Поиск решения (рисунок 3.13):

- выбрать переключатель • минимальному значению;

- Изменяя ячейки: B16:B17;

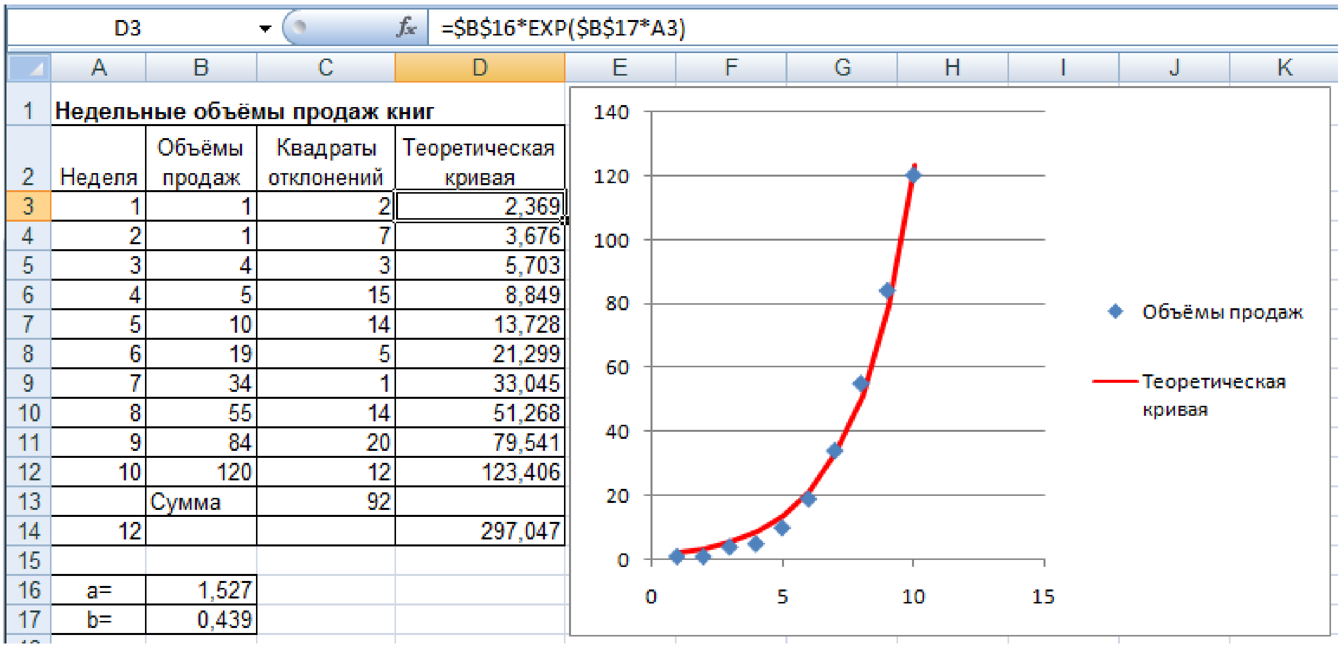
- активировать флажок Сделать переменные без ограничений неотрицательными;

- щёлкнуть по кнопке Найти решение.

8 В результате в ячейках B16, B17 получим значения искомых коэффициентов. Результаты представим с тремя десятичными знаками.

9 Для построения графика теоретической кривой в ячейку D3 введём формулу: **=$B$16*EXP($B$17*A3)** и скопируем её на диапазон D4:D12 и в ячейку D14.

10 Выделим диапазоны A2:B12, D2:D12 и построим точечный график, выполнив команду: вкладка **Вставка/ Диаграмма/ Точечная** (рисунок 3.14). Экспериментальные данные представим в виде отдельных маркеров, а график теоретической кривой в виде линии.


D3 fx =$B$16*EXP($B$17*A3)

	A	B	C	D
1	**Недельные объёмы продаж книг**			
2	Неделя	Объёмы продаж	Квадраты отклонений	Теоретическая кривая
3	1	1	2	2,369
4	2	1	7	3,676
5	3	4	3	5,703
6	4	5	15	8,849
7	5	10	14	13,728
8	6	19	5	21,299
9	7	34	1	33,045
10	8	55	14	51,268
11	9	84	20	79,541
12	10	120	12	123,406
13		Сумма	92	
14	12			297,047
15				
16	a=	1,527		
17	b=	0,439		

Рисунок 3.14 – Отображение на графике исходных данных и теоретической кривой

11 Для добавления на график точки, соответствующей предсказанному значению для 12-й недели:

- на вкладке **Конструктор** щёлкнуть по кнопке Выбрать данные (или выбрать соответствующую команду из контекстного меню для области диаграммы);

- в окне **Выбор источника данных** щёлкнуть по кнопке Добавить и заполнить поля Имя:, Значения X:, Значения Y: соответствующими ссылками и подписями (рисунок 3.15).

На рисунке 3.16 представлен результат решения задачи.

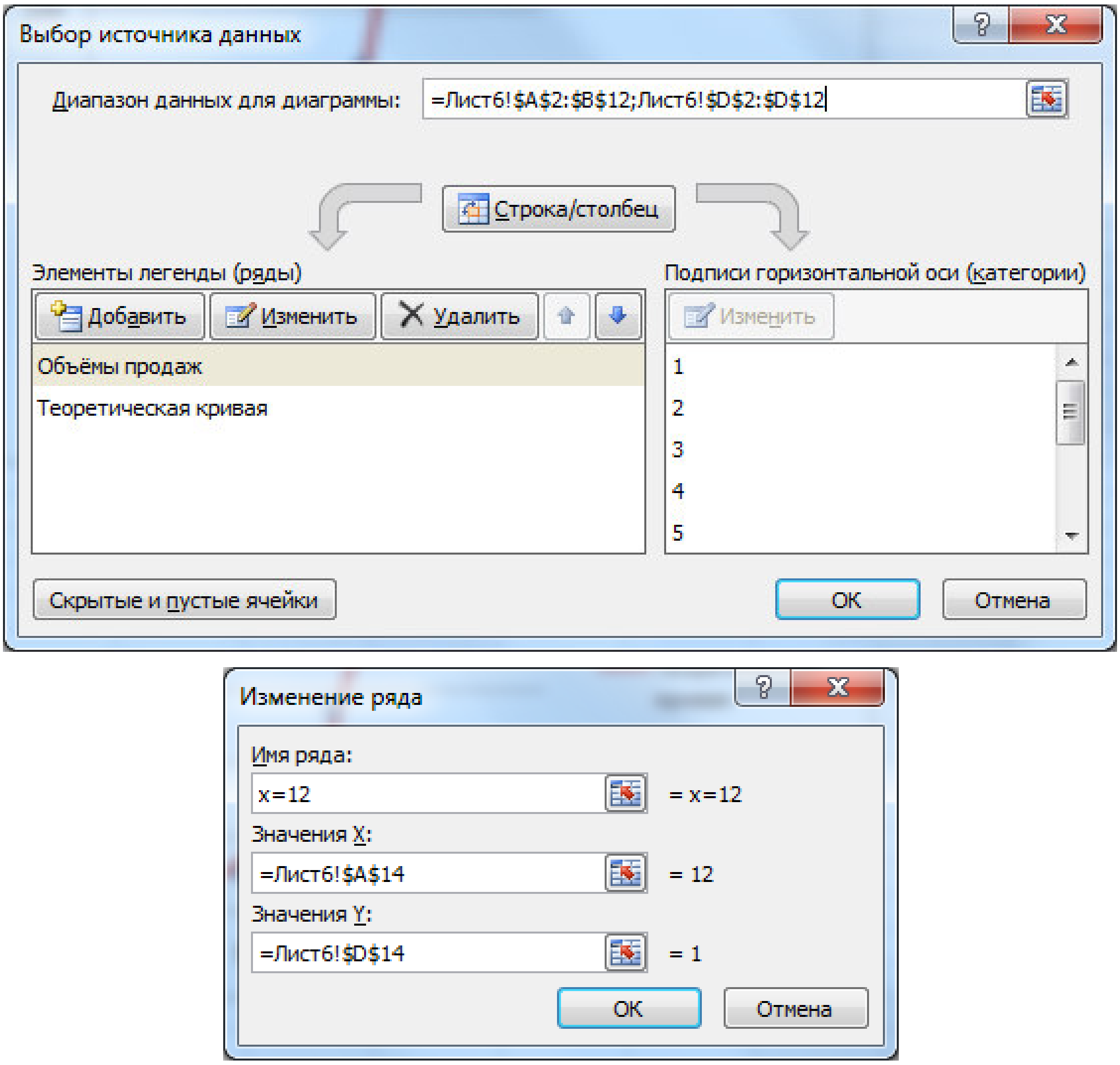


Рисунок 3.15 – Добавление на график точки с предсказанным значением

Недельные объёмы продаж книг

Неделя	Объёмы продаж	Квадраты отклонений	Теоретическая кривая
1	1	2	2,369
2	1	7	3,676
3	4	3	5,703
4	5	15	8,849
5	10	14	13,728
6	19	5	21,299
7	34	1	33,045
8	55	14	51,268
9	84	20	79,541
10	120	12	123,406
	Сумма	92	
12			297,047
a=	1,527		
b=	0,439		

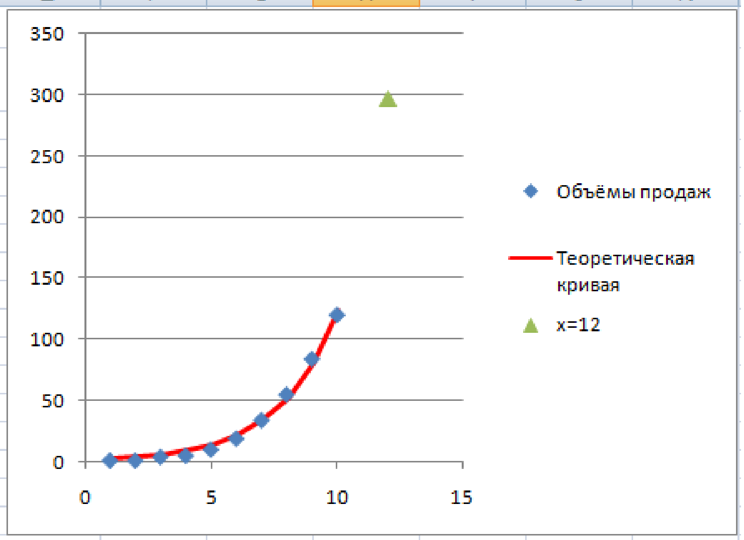


Рисунок 3.16 – Результат решения задачи аппроксимации с помощью метода наименьших квадратов и надстройки Excel Поиск решения

4 РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ EXCEL

4.1 Что такое оптимизационные задачи

Оптимизационными задачами называют особый класс задач, решаемых с помощью вычислительных методов. Они имеют следующие отличительные особенности:

1) сущностью решения этих задач является нахождение значений независимых переменных (именуемых также ***варьируемыми параметрами***), обеспечивающих оптимальное (согласно некоторому критерию) значение выражения, называемого ***целевой функцией***;
2) варьируемые параметры, в общем случае, могут изменяться в некотором диапазоне числовых значений, задаваемом ***граничными условиями*** и ***ограничениями***, имеющими вид неравенств;
3) каждому набору варьируемых переменных соответствует определенное значение целевой функции; таким образом, ***область допустимых решений*** (ОДР), задаваемой указанными граничными условиями и ограничениями, представляет некоторое множество значений целевой функции;
4) существует некоторое правило (***критерий***) отбора из множества допустимых решений единственного, называемого оптимальным значением. Таким критерием может быть нахождение максимального, минимального или равного заданному значению целевой функции;
5) для ускорения нахождения оптимального значения целевой функции алгоритмы решения содержат специальные ***методы направленного поиска***, позволяющие отказаться от полного перебора допустимых решений.

Решение оптимизационных задач требует выполнения определенной аналитической работы по формированию ***математической модели*** исследуемого объекта.

В ходе этого анализа выявляются некоторые признаки, по которым модель можно отнести к тому или иному виду. С каждым из них связаны определенные вычислительные методы и особенности решения оптимизационных задач.

4.2 Классификация оптимизационных задач

Классификационные признаки по отношению к математической модели включают следующие ее составные части:

- ✓ исходные данные;
- ✓ искомые переменные;
- ✓ характер зависимости целевой функции.

Исходными данными для математической модели являются выражение для целевой функции, ограничения и граничные условия. Если при составлении модели точные значения исходных данных (разумеется, кроме значений варьируемых параметров – они не являются исходными данными!) известны, такие данные называют *детерминированными*. Однако в жизни, например, в достаточно распространенных задачах распределения ресурсов точное значение имеющегося ресурса, а также других элементов, входящих в модель, может быть заранее неизвестно. В таких случаях эти элементы модели являются *случайными* величинами.

По физической сущности варьируемые параметры могут принимать *непрерывные* и *целочисленные* значения. Например, в задаче распределения мебели между отделами некоторого учреждения вряд ли будет признано допустимым решение о выделении некоему отделу 3,14 шкафа: количество шкафов должно быть целым числом. В то же время решение, предусматривающее введение в рацион кормления животных 33,7 г минеральных добавок на 1 кг корма не вызовет никакой отрицательной реакции: по смыслу весовые величины могут принимать непрерывные значения. Кроме того, в задачах выбора оптимального варианта в качестве варьируемых параметров выступает еще одна группа переменных, которые могут принимать только определенные значения из некоторого множества непрерывных или целочисленных значений. Такие переменные называют *дискретными*.

И, наконец, по характеру зависимости между переменными (как в целевой функции, так и в ограничениях) различают *линейные* и *нелинейные* модели. Линейными называют такие зависимости, в которые переменные входят в первой степени, и над ними выполняются только операции сложения или вычитания. Если же переменные входят в выражение не в первой степени либо с ними выполняются другие действия, такие зависимости называются нелинейными.

Примером линейной зависимости является следующее выражение для целевой функции:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$

а нелинейной зависимости – выражение для ограничения

$$x_1 x_2 x_3 \le 16.$$

Таким образом, оптимизационные задачи и математические методы их решения с учетом упомянутых признаков могут быть разбиты на следующие классы:

Таблица 4.1 – Классификация оптимизационных задач

Исходные данные	Искомые показатели	Зависимости между переменными	Математическая модель (классы задач)
Детерминированные	Непрерывные	Линейные	Линейного программирования
Детерминированные	Целочисленные, дискретные	Линейные	Целочисленного программирования
Детерминированные	Непрерывные, целочисленные, дискретные	Нелинейные	Нелинейного программирования
Случайные	Непрерывные	Линейные	Стохастического программирования

4.3 Типы задач линейного программирования

К задачам линейного программирования относится широкий класс инженерных и экономических задач. Приведем лишь несколько классических примеров.

Транспортная задача. Имеется несколько пунктов производства и потребления некоторого продукта. Для каждого из пунктов производства задан объем производства, а для каждого пункта потребления – объем потребления. Известна также стоимость перевозки из каждого пункта производства в каждый пункт потребления единицы продукта. Требуется составить план перевозок продукта, в котором все пункты потребления были бы обеспечены необходимыми продуктами, ни из какого пункта производства не вывозилось бы продуктов больше, чем там производится, а стоимость перевозки была бы минимальной.

Задача о выборе оптимального меню. Имеется набор некоторых продуктов, обладающих определенной калорийностью. Известны также количества белков, жиров и углеводов для каждого из этих продуктов и их стоимость. Требуется составить меню, удовлетворяющее требованиям калорийности и сбалансированности питательных продуктов, и при этом минимизирующее суммарную стоимость.

Задача о назначениях. Имеется несколько должностей и соответствующее количество претендентов на эти должности. Назначение i-го претендента на j-ую должность связано с затратами $C[i, j]$. Требуется распределить претендентов по должностям так, чтобы суммарные затраты были минимальны.

Задача о выборе портфеля ценных бумаг. Вкладчик хочет выбрать портфель ценных бумаг, при этом известны средние значения доходов от каждого вида ценных бумаг и ожидаемая дисперсия этих доходов. Требуется отыскать оптимальный портфель, обеспечивающий максимальный ожидаемый доход при минимальном рассеянии, и, следовательно, минимальном риске.

Задачи линейной алгебры. Методы линейного программирования позволяют решать различные системы линейных уравнений.

4.4 Постановка задачи линейного программирования

Математическая модель. Задача линейного программирования в общем виде формулируется следующим образом:

Найти оптимальное значение целевой функции

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to max\,(min, const\,),$$

при

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le q_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le q_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le q_m \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

$$d_i \le x_i \le D_i \quad i = 1 \ldots n,$$

где

n – количество независимых переменных,

m – количество ограничений в виде неравенств,

d_i и D_i – граничные условия для независимой переменной x_i.

4.5 Решение простейшей задачи линейного программирования

Задача 4.1. Мебельная фабрика производит книжные полки двух типов - А и В. Для полки А требуется 3м^2 досок, для полки В - 4м^2. Фабрика может получать 1700 м^2 досок в неделю. Для обработки полки А требуется 12 минут машинного времени, для изделия В - 30 минут. В неделю на фабрике можно использовать 160 часов машинного времени. Сколько изделий каждого типа необходимо изготавливать в неделю на фабрике, если полка приносит 2 доллара прибыли, а полка В - 4 доллара?

Решение.

Для решения любой задачи математического программирования необходимо построить математическую модель. Процесс построения математической модели следует начать с ответа на следующие три вопроса:

1. Для определения каких величин строится модель (т.е. каковы переменные модели)?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из множества всех допустимых значений переменных выбираются оптимальные?
3. Каким ограничениям должны удовлетворять неизвестные?

В нашем случае фабрике необходимо спланировать количество производимых полок так, чтобы прибыль была максимальной. Поэтому переменными модели являются: X_A - количество полок типа А и X_B - количество полок типа В, выпускаемых в неделю.

Суммарная недельная прибыль от производства всех полок равна $2X_A+4X_B$. Целью работы фабрики является определение среди всех допустимых значений X_A, X_B таких, которые максимизируют суммарную прибыль (целевую функцию).

Перейдем к ограничениям, которые налагаются на X_A и X_B. Объем производства полок не может быть отрицательным, следовательно: $X_A, X_B \geq 0$, кроме этого данные переменные должны быть целыми. Расход досок не может превосходить максимально возможный запас данного исходного продукта, следовательно: $3X_A + 4X_B \leq 1700$. Учет фонда машинного времени, доступного фабрике приводит к ограничению-неравенству (минуты переведены в часы): $0.2X_A + 0.5X_B \leq 160$.

Таким образом, математическая модель данной задачи имеет следующий вид:

Переменные модели:

X_A - количество полок типа А, выпускаемых в неделю;

X_B - количество полок типа А, выпускаемых в неделю.

Целевая функция:

$F = 2X_A + 4X_B \rightarrow max$

Ограничения:

$3X_A + 4X_B \leq 1700$

$0.2X_A + 0.5X_B \leq 160$

$X_A, X_B \geq 0$

Подготовленная к решению в MS Excel задача показана на рисунке 4.1, диалоговое окно **Поиск решения** - на рисунке 4.2, на рисунке 4.3 приведены результаты расчета для разработанной модели.

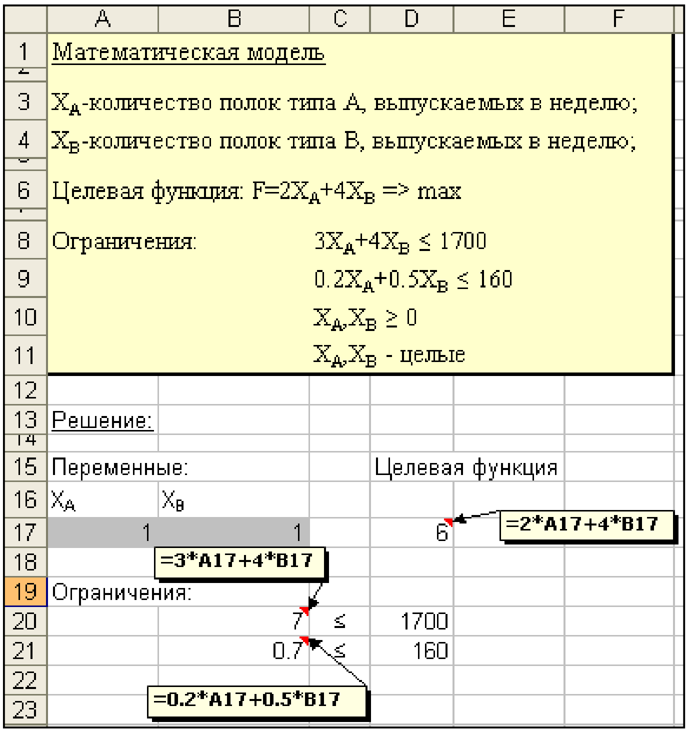


Рисунок 4.1 - Подготовленные данные для решения задачи 4.1

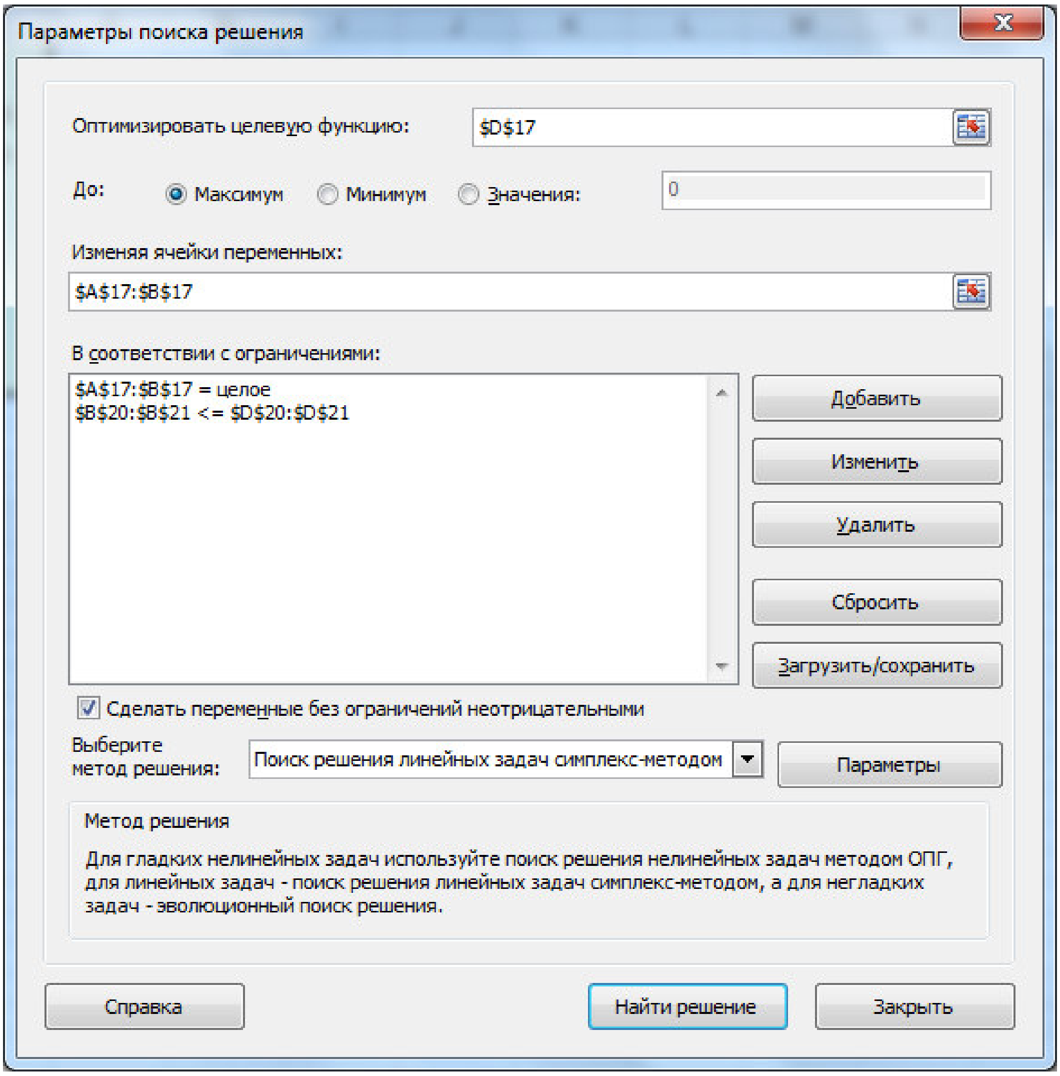


*Рисунок 4.2 - Диалоговое окно **Поиск решения** для задачи 4.1*

13	Решение:					
14						
15	Переменные:			Целевая функция		
16	X_A	X_B				
17	300	200		1400		
18						
19	Ограничения:					
20		1700	≤	1700		
21		160	≤	160		
22						

Рисунок 4.3 - Результаты решения задачи 4.1

4.6 Устранение неограниченности целевой функции

Для примера возьмем простейшую систему неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

Очевидно, область допустимых решений (ОДР) для этой системы не ограничена сверху. В таком случае, при максимизации целевой функции

$F = x_1 \to max$

решение получено быть не может, т.к. ЦФ, так же, как и ОДР, не ограничена сверху. Поэтому при решении такой задачи Excel будет выдавать сообщение Значения целевой ячейки не сходятся.

Неограниченность ЦФ – следствие ошибки в математической модели. Чтобы избежать подобных ошибок, надо выполнять следующие правила:

1. При ***максимизации*** ЦФ она ***должна быть ограничена сверху*** либо с помощью ограничений, либо с помощью граничных условий. При этом модель с точки зрения содержания должна иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l} F \to max \\ F \le q_i \end{array}\right\}$$

2. При ***минимизации*** ЦФ она, соответственно, ***должна быть ограничена снизу,*** т.е. система должна иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l} F \to min \\ F \ge p_i \end{array}\right\}$$

4.7 Транспортная задача.

Задача 4.2. Фирма имеет две фабрики по производству телевизоров и три центра их реализации. Первая фабрика ежедневно производит 70 телевизоров, вторая - 90. Центрам реализации требуется 50, 80 и 30 единиц продукции ежедневно, соответственно. Хранение на фабрике единицы продукции, не поставленной в центр реализации, обходится в $10 в день, а штраф за единицу заказанной, но не поставленной продукции, равен $20 в день. Стоимость перевозки единицы продукции с фабрик в пункты реализации приведена в таблице 4.2.

Таблица 4.2.

Фабрики	**Центры реализации**		
	1	***2***	***3***
1	120	150	90
2	80	100	70

Необходимо так спланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

Решение

Поскольку данная модель сбалансирована (суммарный объем произведенной продукции 70 + 90 = 160 равен суммарному объему потребностей в ней 50 + 80 + 30 = 160), то в этой модели не надо учитывать издержки, связанные со складированием или с недопоставками продукции.

В противном случае в модель нужно было бы ввести:

- *В случае перепроизводства* – фиктивный пункт реализации, стоимость перевозок единицы продукции в который полагается равной стоимости складирования, а объемы перевозок – объемам складирования излишков продукции на фабриках.
- *В случае дефицита* – фиктивную фабрику, стоимость перевозок единицы продукции с которой полагается равной стоимости штрафов за недопоставку продукции, а объемы перевозок – объемам недопоставок продукции в пункты реализации.

Шаг 1. Формируем математическую модель.

Переменные модели:

Неизвестными в данной задаче являются объемы перевозок, поэтому обозначим через x_{ij} объём перевозок с i-ой фабрики в j-ый центр реализации.

Целевая функция:

В данной задаче это суммарные транспортные расходы, т.е.

$$F = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min \quad ,$$

где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i-ой фабрики в j-ый центр реализации.

Ограничения:

Неизвестные в данной задаче должны удовлетворять следующим условиям:

Объемы перевозок не могут быть отрицательными:

$x_{ij} \geq 0$ и целые, $\quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3,$

Так как модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с фабрик, а потребности всех центров реализации должны быть полностью удовлетворены.

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i, i = 1, 2,$$

где a_i – объем производства на i-ой фабрике, b_j – спрос в j-ом центре реализации.

Шаг 2. Ввод данных и формул в таблицу Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Фабрики	Центры реализации					
2		1	2	3			
3	1	120	150	90			
4	2	80	100	70			
5							
6	Переменные				=СУММ(B6:D6)	=	70
7					=СУММ(B7:D7)	=	90
8	Ограничения:	=СУММ(B6:B7)	=СУММ(C6:C7)	=СУММ(D6:D7)			
9		=	=	=			160
10		50	80	30		160	=
11							
12	Целевая функция:	=СУММПРОИЗВ(B3:D4;B6:D7)					
13							

Рисунок 4.4 – Лист Excel с введенными данными и формулами для задачи 4.2

Шаг 3. Делаем активной ячейку с целевой функцией (B12). Выполняем команду: вкладка **Данные \ Поиск решения**. Окно *Поиск решения* с необходимыми установками и заданными ограничениями представлено на рисунке 4.5.

В списке Выберите метод решения: выбираем Поиск решения линейных задач симплекс-методом. Щёлкаем кнопку Найти решение.

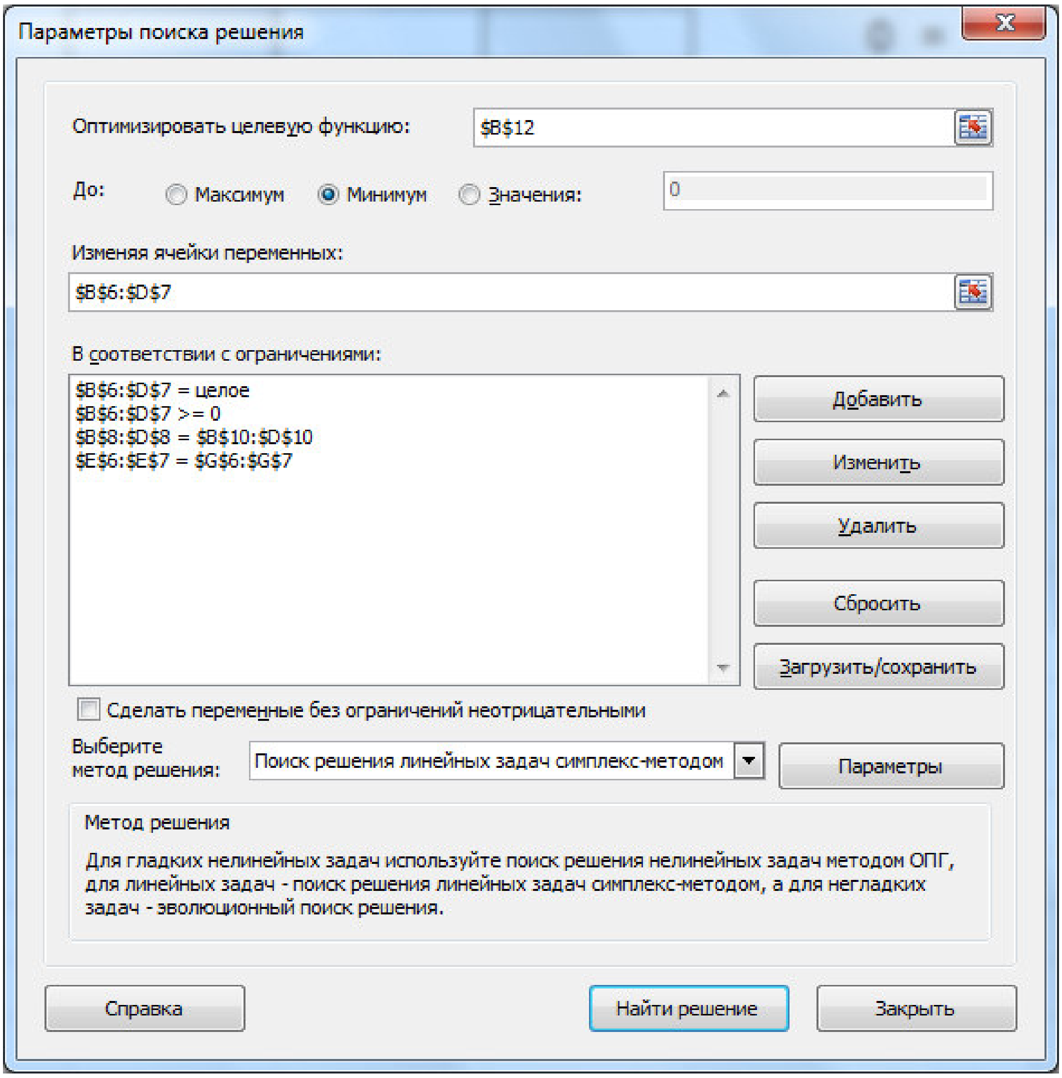


Рисунок 4.5 – Окно Поиск решения *для задачи 4.2*

Шаг 4. **Получение и анализ результатов решения.**

В результате, получим решение, представленное на рисунке 4.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Фабрики	Центры реализации					
2		1	2	3			
3	1	120	150	90			
4	2	80	100	70			
5							
6	Переменные	40	0	30	70	=	70
7		10	80	0	90	=	90
8	Ограничения:	50	80	30			
9		=	=	=			160
10		50	80	30		160	=
11							
12	Целевая функция:	16300					
13							

Рисунок 4.6 – Результаты решения задачи 4.2 в Excel

4.8 Задачи с булевыми переменными

Задача 4.3. Есть 4 варианта использования ресурсов. Прибыль, которую приносит каждый вариант, потребные и располагаемые ресурсы приведены в таблице 4.3. Выбрать такие варианты, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

Таблица 4.3.

Варианты	**1**	**2**	**3**	**4**	**Наличие ресурсов**
Трудовые	10	15	22	28	50
Финансы	200	180	240	250	650
Прибыль	70	80	90	210	

Решение.

Шаг 1. Формирование математической модели.

Переменные модели:

$$\delta_j = \begin{cases} 1 - & \text{если j-й вариант принят, } j = 1,2,3,4 \\ 0 - & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Целевая функция:

$F=70\ \delta1+80\ \delta2+90\ \delta3+210\ \delta4 \ \rightarrow \max$

Ограничения:

$10\ \delta1+15\ \delta2+22\ \delta3+28\ \delta4 \ \leq 50$

$200\ \delta1+180\ \delta2+240\ \delta3+250\ \delta4 \ \leq 650$

$\delta1,\ \delta2,\ \delta3,\ \delta4$ - двоичные

Шаг 2. Ввод данных и формул в таблицу Excel (рисунок 4.7)**.**

	A	B	C	D	E	F
1	Варианты	1	2	3	4	Наличие ресурсов
2	Трудовые	10	15	22	28	50
3	Финансы	200	180	240	250	650
4	Прибыль	70	80	90	210	
5						
6	Переменные					
7		δ1	δ2	δ3	δ4	
8						
9						
10	Целевая функция:		=B4*$B$8+C4*$C$8+D4*$D$8+E4*$E$8			
11						
12	Ограничения:					
13	Трудовые		=B2*$B$8+C2*$C$8+D2*$D$8+E2*$E$8		<=	50
14	Финансы		=B3*$B$8+C3*$C$8+D3*$D$8+E3*$E$8		<=	650

Рисунок 4.7 – Заполнение таблицы Excel данными и формулами

Шаг 3. Делаем активной ячейку с целевой функцией (С10). Выполняем команду: вкладка **Данные** \ **Поиск решения**. В окне *Поиск решения* задаем в соответствующих полях необходимые значения и ограничения (рисунок 4.8).

В списке Выберите метод решения: выбираем Поиск решения линейных задач симплекс-методом. Щёлкаем кнопку Найти решение**.**

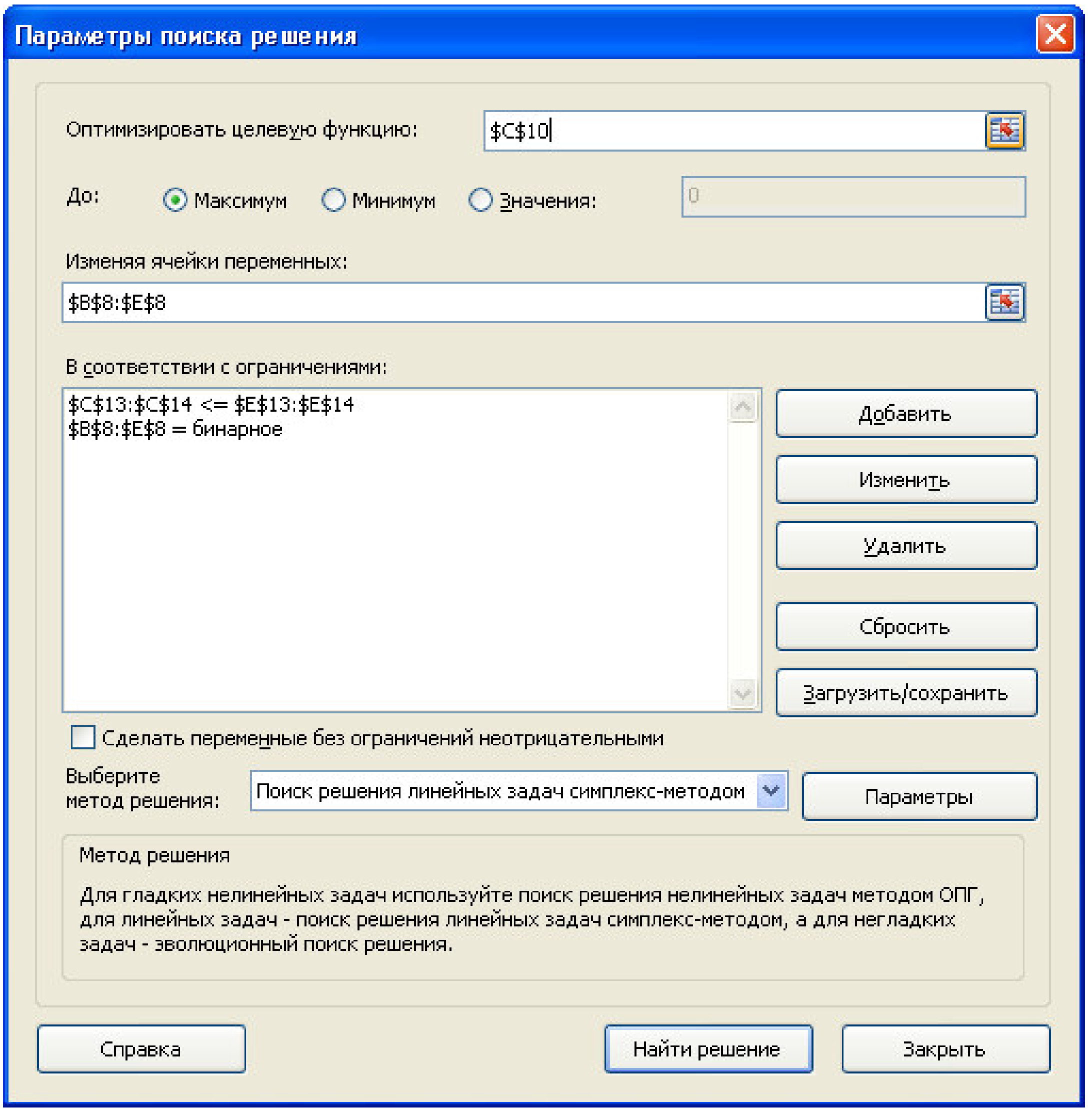


Рисунок 4.8 – Заполнение окна Поиск решения *для решения задачи 4.3*

Шаг 4. Получение и анализ результатов решения**.**

В результате, получим решение, представленное на рисунке 4.9.

	A	B	C	D	E	F
1	Варианты	1	2	3	4	Наличие ресурсов
2	Трудовые	10	15	22	28	50
3	Финансы	200	180	240	250	650
4	Прибыль	70	80	90	210	
5						
6	Переменные					
7		б1	б2	б3	б4	
8		0	0	1	1	
9						
10	Целевая функция:		300			
11						
12	Ограничения:					
13	Трудовые		50		<=	50
14	Финансы		490		<=	650

Рисунок 4.9 – Результаты решения в Excel для задачи 4.3

Изменение ограничений с учётом дополнительных условий.

Если должен использоваться только 1 вариант:

$\delta 1 + \delta 2 + \delta 3 + \delta 4 = 1$

Если может использоваться либо 1-й вариант, либо 4-й:

$\delta 1 + \delta 4 = 1$

Если 1-й вариант должен использоваться вместе с 3-м:

$\delta 1 = \delta 3$

Если должно быть принято обязательно 3 варианта:

$\delta 1 + \delta 2 + \delta 3 + \delta 4 = 3$

5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MATHCAD

MathCad включает несколько функций для аппроксимации экспериментальных данных теоретической кривой, параметры которой определяются из условия минимума суммы квадратов отклонений.

В отличие от функций интерполяции, обсужденных в предыдущем разделе, эти функции не требуют, чтобы аппроксимирующая кривая или поверхность проходили в точности через точки данных, поэтому они гораздо менее чувствительны к ошибкам данных, чем функции интерполяции.

Конечный результат аппроксимации - вычисление параметров аппроксимирующей функции, с помощью которой можно, например, оценить значения в промежутках между заданными точками.

5.1 Линейная зависимость

Если известно, что зависимость между величинами x и y определяется выражением

$$y = a\,x + b, \tag{5.1}$$

то угловой коэффициент a и свободный член b могут быть найдены с помощью функций MathCad:

$$a := \mathrm{slope}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y});$$

$$b := \mathrm{intercept}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

где $\boldsymbol{x}$ - вектор значений независимой переменной;

$\boldsymbol{y}$ - вектор значений зависимой переменной.

На рисунке 5.1 показан пример аппроксимации данных линейной зависимостью.

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 10.3 \\ 12.1 \\ 15.5 \\ 19.6 \\ 19.1 \\ 24.4 \\ 29.2 \end{pmatrix}$$

$$i := 0 .. 6$$

$$a := \mathrm{slope}(x, y) \qquad a = 2.339$$

$$b := \mathrm{intercept}(x, y) \qquad b = 6.571$$

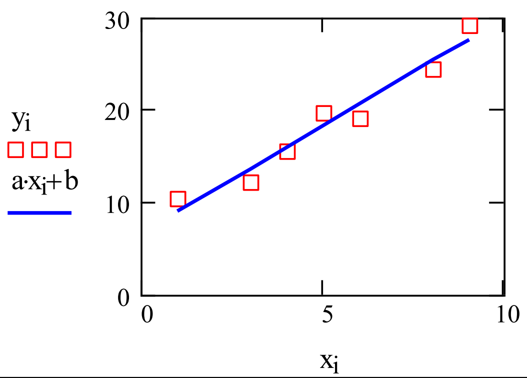


Рисунок 5.1 - Пример аппроксимации данных линейной зависимостью

5.2 Зависимость, сводящаяся к линейной

Часто нелинейная зависимость путем элементарных математических преобразований может быть сведена к линейной. В этом случае для ее аппроксимации могут быть использованы функции, описанные в разделе 5.1.

Например, если x и y связаны соотношениями вида

$$Y = A \cdot \exp(-k \cdot X^2), \qquad (5.2)$$

то, логарифмируя это выражение, получим:

$$\ln Y = \ln A - k \cdot X^2 . \qquad (5.3)$$

Вводя новые переменные $y = \ln Y$ и $x = -X^2$, сводим зависимость (5.3) к виду (5.1). Тогда:

$$k := \mathrm{slope}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y});$$
$$A := \exp(\mathrm{intercept}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) .$$

На рисунке 5.2 показана аппроксимация данных зависимостью (5.2).

Исходные данные

$$X := \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \\ 1.7 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0.468 \\ 0.355 \\ 0.263 \\ 0.19 \\ 0.134 \\ 0.093 \\ 0.062 \end{pmatrix}$$

Преобразование переменных

$$i := 0 .. 6$$
$$x_i := -(X_i)^2$$
$$y_i := \ln(Y_i)$$

Нахождение коэффициентов

$$k := \mathrm{slope}(x, y) \qquad k = 1.2$$
$$A := \exp(\mathrm{intercept}(x, y)) \qquad A = 2$$

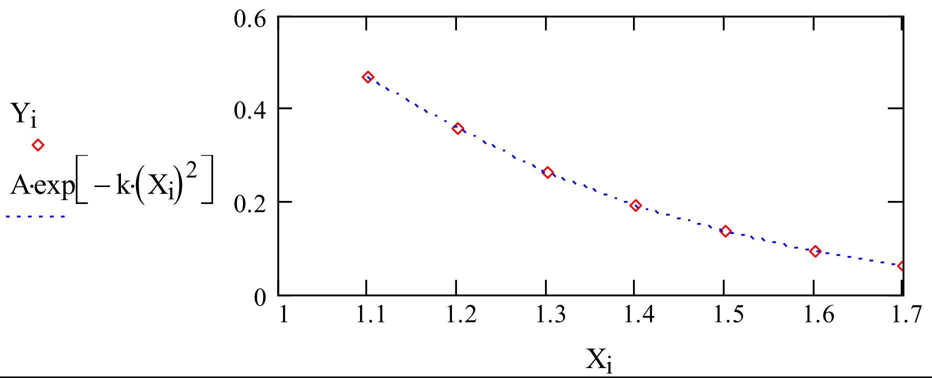


Рисунок 5.2 - Аппроксимация данных зависимостью $Y = A \cdot \exp(-k \cdot X^2)$

5.3 Полиномиальная зависимость

Для аппроксимации данных полиномом

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

используется функция MathCad regress($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, n), где $\boldsymbol{x}$ - вектор значений независимой переменной, $\boldsymbol{y}$ - вектор значений зависимой переменной, n - степень аппроксимирующего полинома. Функция regress допускает использование полинома любого порядка, но на практике использование полинома выше $n = 4 \div 5$ обычно лишено смысла.

Функция regress возвращает вектор, содержащий $n + 3$ компоненты, причем первые три из них - вспомогательные, а остальные соответствуют коэффициентам $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Для вычисления значений аппроксимирующей функции в произвольной точке x_0 можно использовать выражение:

$$\sum_{i=3}^{n} regress(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, n)_i \cdot x_0^{\,i-3},$$

либо использовать встроенную функцию MathCad

interp ($\boldsymbol{vs}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, x_0$),

где $\boldsymbol{vs}$ - вектор, вычисленный функцией regress.

Пример полиномиальной регрессии показан на рисунке 5.3.

Исходные данные

$$X := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.9 \\ 2.8 \\ 3.6 \\ 4.8 \\ 5.6 \\ 6.8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 3.1 \\ 8.4 \\ 19.9 \\ 24.2 \\ 50.0 \\ 74.28 \\ 94.16 \end{pmatrix}$$

Вычисление коэффициентов аппроксимирующего полинома

$$a := regress(X, Y, 2) \qquad a = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1.614 \\ 1.953 \\ 1.853 \end{pmatrix}$$

Построение графика

$$i := 0 .. 6 \qquad t := 1.0, 1.12 .. 7.2$$

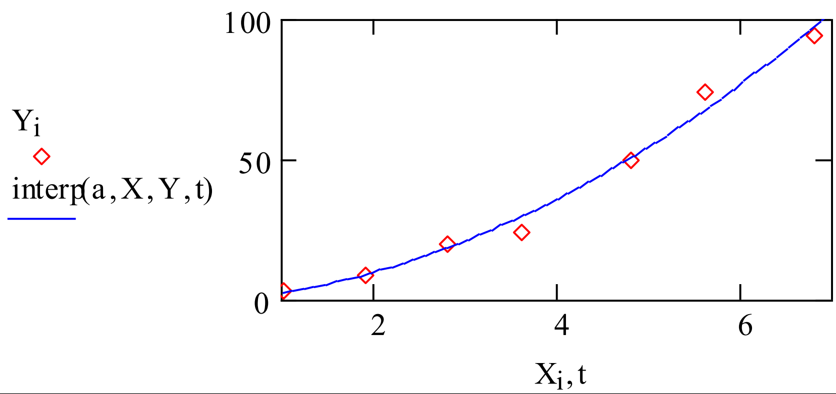


Рисунок 5.3 - Аппроксимация данных полиномом второго порядка

5.4 Линейная комбинация функций

Рассмотренные зависимости далеко не во всех случаях подходят для описания данных. Бывает, что нужно искать эту зависимость в виде линейных комбинаций известных функций. Например, в рядах Фурье следует аппроксимировать данные, используя комбинацию комплексных компонент.

Функция MathCad linfit($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, **F**), где $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ - векторы данных, **F** - функция, содержащая вектор функций $f_i(x)$, которые нужно объединить в виде линейной комбинации, предназначена для решения этой задачи. Функция linfit возвращает коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ аппроксимирующего выражения

$$y=a_0f_0(x)+a_1f_1(x)+\dots+a_nf_n(x)$$

На рисунке 5.4 показан пример аппроксимации данных выражением $a_0x+a_1x^2+a_2(x+1)^{-1}$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.22 \\ 0.1 \\ 0.8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad F(x) := \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ \dfrac{1}{x+1} \end{pmatrix}$$

$$S := \mathrm{linfit}(x, y, F) \qquad S = \begin{pmatrix} 3.132 \\ -1.372 \\ 0.42 \end{pmatrix}$$

Аппроксимирующая функция

$$3.132 \cdot x^2 - 1.372 \cdot x + 0.42 \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$i := 0..5 \qquad r := 0, 0.02..1 \qquad g(t) := F(t) \cdot S$$

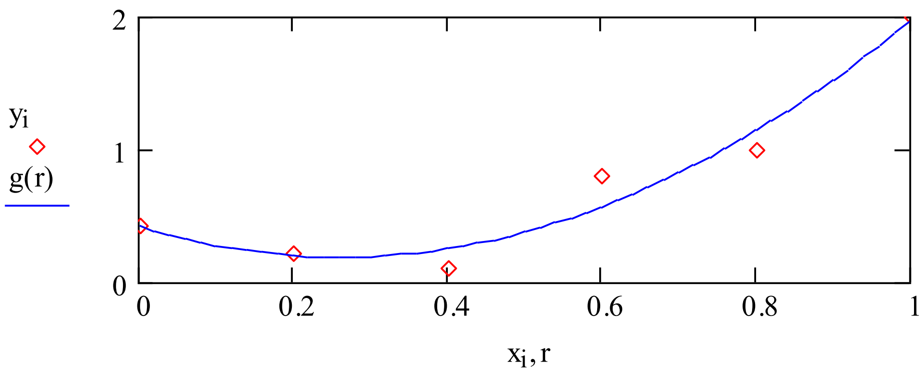


Рисунок 5.4 - Пример использования функции linfit

5.5 Произвольная зависимость

В том случае, если аппроксимирующая зависимость не может быть сведена к линейной, полиномиальной или линейной комбинации других функций, для нахождения ее параметров можно минимизировать сумму квадратов отклонений данных от искомой зависимости с помощью функции Minerr (сумма квадратов отклонений всегда положительна) либо Minimize.

На рисунке 5.5 показан пример, в котором функция Minerr используется, чтобы определить неизвестные параметры в распределении Вейбулла $y=a\cdot b\cdot x^{(b-1)}\cdot \exp(-a\cdot x^b)$

$$F(x,a,b) := a \cdot b \cdot x^{(b-1)} \cdot \exp\left(-a \cdot x^{b}\right)$$ Аппроксимирующая функция

$$i := 0..11 \qquad x_i := \frac{i}{5} \qquad y_i := F\left(x_i, 0.1, 3\right)$$ Моделирование исходных данных

$$SSE(a,b) := \sum_i \left(y_i - F\left(x_i, a, b\right)\right)^2$$ Сумма квадратов отклонений (минимизируемый функционал)

$$a := 0.8 \qquad b := 1.5$$ Задание начальных значений

Given

$$SSE(a,b) = 0$$ Блок решения

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} := MinErr(a,b)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Решение задачи

$$z := 0, 0.1 .. 2.3$$

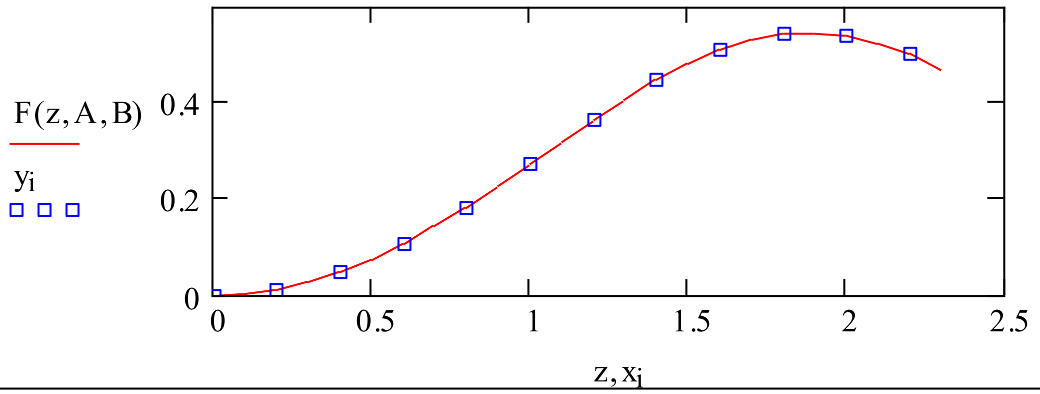


*Рисунок 5.5 - Использование функции **Minerr** для решения задачи аппроксимации*

6 РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В MATHCAD

6.1 Функции minimize, maximize

В среду MathCad версии 8 и выше введены две новые функции minimize и maximize, позволяющие достаточно легко решать оптимизационные задачи. Эти функции имеют вид:

Minimize(*f*, *var1*, *var2*, ...);

Maximize(*f*, *var1*, *var2*, ...).

Функции вычисляют величины *var1, var2, ...*, которые удовлетворяя условиям, заданным в блоке решения делают значения функции *f* минимальными либо максимальными.

Аргументы:

var1, var2, ... – скалярные переменные, используемые в блоке решения. Их начальные значения должны быть заданы перед блоком решения.

f – функция, которая должна быть определена перед блоком решения.

Для нахождения минимума или максимума функции необходимо:

- определить функцию, минимум или максимум которой нужно найти;
- задать начальное приближение для всех неизвестных, которые нужно найти;
- напечатать ключевое слово Given, начинающее блок решения;
- ниже слова Given ввести уравнения и неравенства, определяющие область решения;
- ввести любое выражение, которое включает функцию minimize или maximize.

Эти функции возвращают скаляр, если используется только одна переменная. Иначе результат есть вектор, первый элемент которого есть *var1*, второй - *var2*, и т. д.

Если в блоке решения нет условий, то слово Given можно не вводить.

Функции minimize и maximize нечувствительны к регистру.

Пример использования функций для нахождения экстремумов показан на рисунках 6.1 и 6.2.

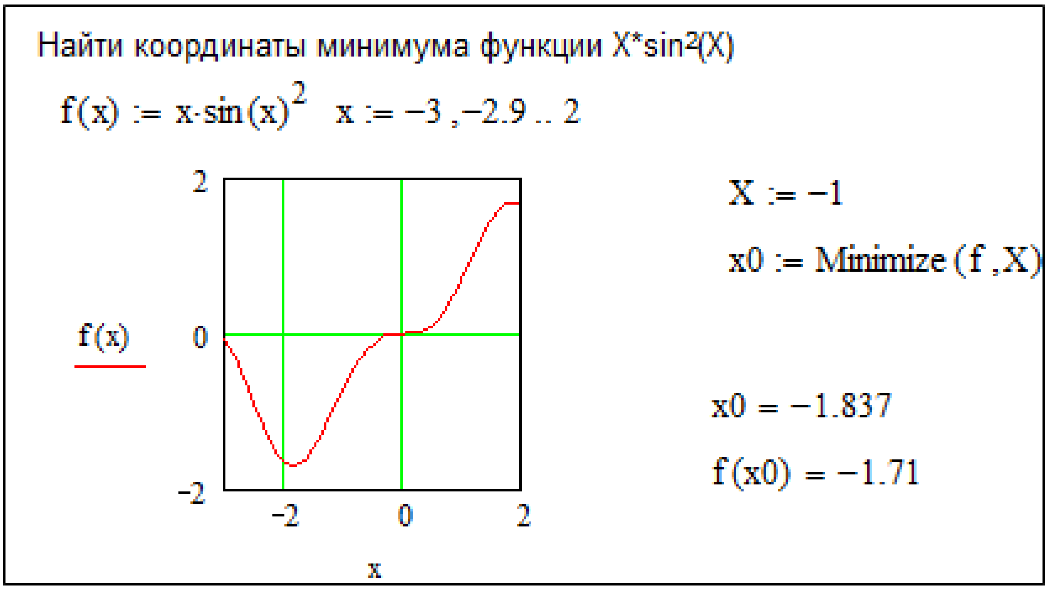


Рисунок 6.1 - Пример нахождения минимума одномерной функции

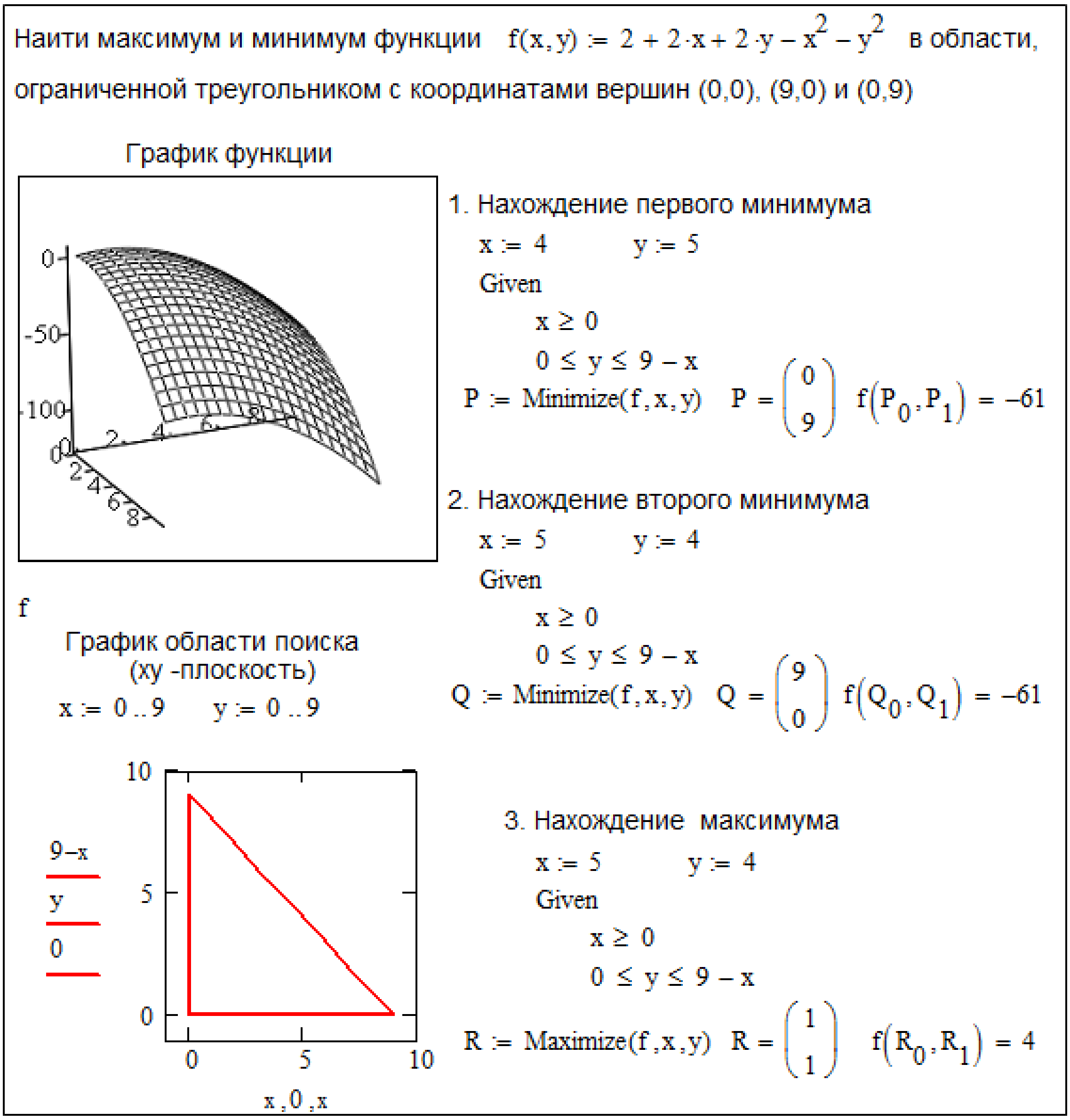


Рисунок 6.2 - Пример нахождения минимума и максимума двумерной функции

6.2 Примеры решения оптимизационных задач в MathCAD

С помощью рассмотренных функций в системе MathCad стало очень удобно решать задачи линейного программирования. На рисунке 6.3 представлен протокол решения следующей задачи.

Задача 6.1. Требуется спланировать выпуск стульев первого типа (количество – переменная N1) по цене 8 у.е. и второго типа (N2) по цене 12 у.е., ориентируясь на ограничения по ресурсам: 440 метров досок, 65 кв. м. обивочной ткани и 320 человеко-часов трудовых резервов. На стул первого типа требуется 2 м. досок, 0.5 кв. м. ткани и 2 человеко-часа работы, на стул второго типа – 4 м., 0.25 кв. м., и 2.5 человеко-часа, соответственно.

Необходимо составить план выпуска в двух вариантах:

А) обеспечить максимальное общее количество стульев;

Б) обеспечить максимальную прибыль от продажи стульев.

1. Вариант А - обеспечение максимального количества стульев

$FA(N1, N2) := N1 + N2$ Первая целевая функция - общее число стульев

$N1 := 50 \quad N2 := 50$ Начальное приближение

Given

$2N1 + 4N2 \le 440$ Ограничение по доскам

$0.5N1 + 0.25N2 \le 65$ Ограничение по ткани

$2N1 + 2.5N2 \le 320$ Ограничение по трудовым ресурсам

$\begin{pmatrix} N1 \\ N2 \end{pmatrix} := \mathrm{maximize}(FA, N1, N2) \qquad \begin{pmatrix} N1 \\ N2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \end{pmatrix}$

2. Вариант Б - обеспечение максимальной прибыли

$FB(N1, N2) := 8N1 + 12N2$ Вторая целевая функция - прибыль

$N1 := 50 \quad N2 := 50$ Начальное приближение

Given

$2N1 + 4N2 \le 440$ Ограничение по доскам

$0.5N1 + 0.25N2 \le 65$ Ограничение по ткани

$2N1 + 2.5N2 \le 320$ Ограничение по трудовым ресурсам

$\begin{pmatrix} N1 \\ N2 \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(FB, N1, N2) \qquad \begin{pmatrix} N1 \\ N2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$

Рисунок 6.3 - Решение задачи линейного программирования

Задача 6.2. Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Минимальное требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в таблице: Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

Длина заготовки, (см)	Вариант разреза					
	- -	-	-	- -	-	- -
Величина отходов (см)						

На рисунке 6.4 представлено решение в пакете MathCAD задачи 6.2.

ORIGIN := 1

Целевая функция:

$$F(X) := 20\,X_1 + 30\,X_2 + 15\,X_3 + 5\,X_4 + 25\,X_5 + 10\,X_6$$

Начальные значения вектора решения: $X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Блок решения: Given

$$2\cdot X_1 + X_2 + X_3 \ge 40$$
$$X_2 + 3\,X_4 + X_5 \ge 30$$
$$X_3 + X_5 + 2\,X_6 \ge 20$$
$$X \ge 0$$

$Z := \text{Minimize}(F, X)$ $\quad Z = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

$F(Z) = 550$

Рисунок 6.4 – Решение задачи 6.2 в пакете MathCAD

7 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ НА ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ

При выполнении лабораторных работ в компьютерных классах кафедры «Автоматизации управления» НТИ НИЯУ МИФИ следует обратить внимание на следующее:

- *на студенческих компьютерах установлена защита от записи на логические устройства C:,D:иG:, а также запрет на обращение к логическому устройству A:.*
- *на устройстве Z: в папках Temp и Work находятся файлы с заданиями для студентов – они доступны только для чтения.*
- *все работы студенты сохраняют <u>только на устройстве E: в папках своих групп</u> (при сохранении файлов в корневом каталоге устройства E: они будут автоматически уничтожены после перезагрузки компьютера).*
- *при необходимости студенты могут копировать свои файлы-результаты в папки преподавателей на устройстве Z:.*

7.1 Построение графиков и диаграмм в Excel. Использование надстроек Подбор параметра и Поиск решения для решения уравнений и отыскания экстремумов функций

1. Запустите приложение Microsoft Office EXCEL. Откройте файл **Z:\WORK\LR_1-Реш_инж_задач_Графики_уравнения.xls** и сохраните его с именем **Фамилия_1.xls** в своей папке на устройстве **E:**.
2. Выполните задания, содержащиеся в полученном файле на листах **Задача 1 - Задача 4**:

Задача 1.

Построить на одном поле графики функций при $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

$$Y_1(x)=2\sin(x)*\cos(x)$$

$$Y_2(x)=3\sin(x)*\cos^2(2x)$$

Первая зависимость должна быть показана сплошной линией синего цвета с круглыми маркерами, вторая - пунктир красного цвета без маркеров. В легенде кривые должны быть помечены как $y_1(x)$, $y_2(x)$

В задачах 2 - 4 все решения должны быть проиллюстрированы соответствующими графиками

Задача 2.

Найти все корни уравнения:

$$x^3 + e^{-x} - 3 \cdot e^{-(3x-3)^2} = 1$$

Задача 3.

Найти минимум и максимум функции *f(x)* на интервале [-2; 4]:

$$f(x) = \sin(x + x \cdot \sin(x))$$

Задача 4.

Найти минимум функции $f(x, y)$ в области $0.4 \le x \le 2.6$, $-0.2 \le y \le 1$

$$f(x, y) = 0.5x^3 + 4y^2 - 4x - 4y + 2$$

7.2 Решение задач аппроксимации в Excel

1. Запустите приложение Microsoft Office EXCEL. Откройте файл **Z:\WORK\LR_2-Реш_инж_задач_Аппроксимация.xls** и сохраните его с именем **Фамилия_2.xls** в своей папке на устройстве **E:**.
2. Выполните задания, содержащиеся в полученном файле на листах **Линейная регрессия** (рисунок 7.1), **Нелинейная регрессия** (рисунок 7.2):

Доходы фирмы за 4 месяца приведены в таблице:

№ месяца	доход
1	3100
2	5100
4	5400
6	8100

1 Построить соответствующий график и определить параметры аппроксимирующей линейной зависимости с помощью пункта меню «Добавить линию тренда…». Отобразить экспериментальные точки в виде отдельных маркеров, линия тренда – без маркеров.

2 Определить параметры аппроксимирующей линейной зависимости с помощью функций НАКЛОН, ОТРЕЗОК.

3 Вычислить предполагаемую прибыль фирмы в девятом месяце её работы:
- подстановкой соответствующих параметров в линейную зависимость;
- с помощью функции ПРЕДСКАЗ.

4 С помощью надстройки «Подбор параметра» определить в каком месяце доход будет составлять 17200.

ВСЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ПРОКОММЕНТИРОВАНЫ!!!

Рисунок 7.1 – Задание для выполнения на листе ***Линейная регрессия***

1. Определить, какая из трех предложенных теоретических зависимостей наилучшим образом описывает набор экспериментальных точек $\{x_i, y_i\}$, для чего:

а) вычислить параметры каждой теоретической зависимости;

б) вычислить сумму квадратов отклонений экспериментальных точек от каждой теоретической зависимости;

в) отобразить на графиках (для каждой зависимости – отдельный график) экспериментальные точки и теоретические зависимости.

$y_1(x) = C + D \cdot \ln(x)$

$y_2(x) = K \cdot X^{M/2}$

$y_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

x	3	4	5	6	7
y	1.39	1.92	2.47	3.11	4.43

2. Предсказать значение Y при X = 12 для каждого вида аппроксимации, показать соответствующие точки на графиках

Рисунок 7.2 – Задание для выполнения на листе ***Нелинейная регрессия***

7.3 Решение оптимизационных задач средствами Excel

1. Запустите приложение Microsoft Office EXCEL. Откройте файл **Z:\WORK\LR_3-Реш_инж_задач_Линейное программирование.xls** и сохраните его с именем **Фамилия_3.xls** в своей папке на устройстве **E:**.
2. Выполните задания, содержащиеся в полученном файле на листах **Задача 1 - Задача 4** :

Задача 1

На предприятии имеется ограниченный запас древесины трех видов, из которого можно изготовить четыре типа изделий различной цены и материалоемкости.
Определить оптимальные количества каждого изделия для достижения максимальной общей стоимости этих изделий.

сырье	запас, м^3	материалоемкость изделия (дм^3)			
		1	**2**	**3**	**4**
сосна	30	100	200	300	300
дуб	20	100	100	100	200
липа	50	300	400	200	100
цена изделия ($)		**100**	**130**	**150**	**210**

Задача 2

На мебельной фабрике из стандартных листов необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.
Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
A	2	6
B	5	4
C	2	3
Величина отходов (см^2)	12	16

Задача 3

Фирма имеет 4 фабрики и 5 центров распределения ее товаров. Фабрики фирмы располагаются в Денвере, Бостоне, Новом Орлеане и Далласе с производственными возможностями 200, 150, 225 и 175 единиц продукции ежедневно, соответственно. Центры распределения товаров фирмы располагаются в Лос-Анджелесе, Далласе, Сент-Луисе, Вашингтоне и Атланте с потребностями в 100, 200, 50, 250 и 150 единиц продукции ежедневно, соответственно. Хранение на фабрике единицы продукции, не поставленной в центр распределения, обходится в $ 0,75 в день, а штраф за просроченную поставку единицы продукции, заказанной потребителем в центре распределения, но там не находящейся, равен $2,5 в день. Стоимость перевозки единицы продукции с фабрик в пункты распределения приведена в таблице.
Спланировать перевозки так, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

	Лос-Анджелес	Даллас	Сент-Луис	Вашингтон	Атланта
Денвер	1,5	2	1,75	2,25	2,25
Бостон	2,5	2	1,75	1	1,5
Новый Орлеан	2	1,5	1,5	1,75	1,75
Даллас	2	0,5	1,75	1,75	1,75

Задача 4

Имеется 4 варианта использования ресурсов:

Вариант	1	2	3	4	Наличие ресурсов
Прибыль	70	80	90	210	
Трудовые ресурсы	10	15	22	28	50
Финансовые ресурсы	200	180	240	250	650

Какие варианты следует принять для получения максимальной прибыли, если должно быть принято не более 2 вариантов из предложенных, а 3-ый вариант обязательно требует реализации вместе со 2-м?

7.4 Решение задач аппроксимации в MathCad

1. Откройте файл **Z:\WORK\ LR4-ВМвРИЗ_нелин.аппр(Mcad).mcd** и сохраните его с именем **Фамилия_4.mcd** в своей папке на устройстве **E:**.
2. Выполните задания, содержащиеся в полученном файле:

Аппроксимировать данные указанными зависимостями, (вычислить коэффициенты) и построить графики, на которых отобразить экспериментальные точки и теоретические кривые. Вычислить теоретическое значение в точке x0 и показать его на графике.

1. Методом сведения зависимости к линейной: (x0=1.55)

1.1 $Y11(x) = \dfrac{c}{d + 0.6\cdot\exp(-x)}$ $\quad x11 := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y11 := \begin{pmatrix} 1.691 \\ 3.118 \\ 5.519 \end{pmatrix}$

1.2 $Y12(x) = \dfrac{x}{c\cdot x + d}$ $\quad x12 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y12 := \begin{pmatrix} 0.1333 \\ 0.1600 \\ 0.1714 \end{pmatrix}$

2. Полиномом второй степени : (x0=3.25)

2.1 С использованием функции regress

2.2 С использованием функции linfit

$$x2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 49 \\ 142 \end{pmatrix}$$

3. Зависимостью Y3(x)=Ax+Bexp(x)+C/x (x0=3.5)

$$x3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad y3 := \begin{pmatrix} 1.575 \\ 9.211 \\ 22.268 \\ 52.529 \\ 130.131 \end{pmatrix}$$

4. Методом минимизации суммы квадратов отклонений (x0=2.35)

4.1 $Y41(x) = c + d \cdot \ln(x)$

4.2 $Y42(x) = K \cdot x^{\frac{m}{2}}$

$$x4 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad y4 := \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.9 \\ 2.5 \\ 3.1 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

7.5 Решение задач оптимизации в MathCad

1. Запустите приложение MathCad. Откройте файл **Z:\WORK\LR5-ВМвРИЗ_оптимизация(Mcad).doc.**
2. Решите задачи, условие которых приведено в этом файле. Получившееся в MathCad решение сохраните в файле с именем **Фамилия_5.mcd** в своей папке на устройстве **E:**.

Решить в MathCAD:

Задача 1. Составить наиболее дешевую диету, содержащую, по крайней мере, 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Содержание компонент в продуктах и цены приведены в таблице.

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	-	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

Задача 2. Для производства четырех видов компьютеров (c1, c2, c3, c4) имеются комплектующие пяти видов. Необходимо спланировать выпуск компьютеров так, чтобы их число было максимально.

Компьютер	стоимость	Число комплектующих, идущих на один компьютер				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
C1	600	1	0	4	0	3
C2	2500	1	0	8	0	8
C3	25000	0	1	0	4	15
C4	60000	0	1	0	8	65
Наличие комплектующих		100	20	500	100	1200

Задача 3. В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 руб. и 12 кг для первого типа, 500 руб. и 16 кг для второго типа, 600 руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить возможную максимальную и минимальную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Литература основная

1.1 Васильев А. Н. Числовые расчеты в Excel. Учеб. Пособие. СПб. : Лань, 2014.- 608 с. :ил.

1.2 Гончаров, В. А. Методы оптимизации : учеб.пособие для вузов. - М. :Юрайт : ИД Юрайт, 2014. - 191 с.

1.3 050Зализняк, В. Е. Численные методы. Основы научных вычислений : учеб.и практикум для академич. бакалавриата. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 356 с.

1.4 Сухарев, А. Г. Методы оптимизации : учеб.и практикум для бакалавриата и магистратуры. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 367 с.

2 Дополнительная литература

2.1 MathCAD 6.0 Plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95./Перевод с англ. - М.: Информационно издательский дом “Филинъ”, 1996. - 712с.:ил.

2.2 Информатика. Базовый курс : учеб. для бакалавров и магистров / С.В. Симонович ; под ред. С.В. Симоновича. – 3-е изд. – СПб. : Питер, 2013. – 640 с. : ил.

2.3 Матросов В.Л. Информатика / под ред. В. Л. Матросова: учеб. для вузов .- М. : Академия, 2012. – 336 с. : ил.

2.4 Пантелеев А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие для втузов / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - М. : Высшая школа, 2002. - 544 с. : ил.

2.5 Плис А. И. Mathcad 2000 : Математический практикум для экономистов и инженеров : учеб. пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. М. : Финансы и экономика, 2000. - 656 с. : ил.

2.6 Плис А. И. Mathcad: Математический практикум для инженеров и экономистов : учеб. пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. 2 е изд., перераб. и доп. М. : Финансы и статистика, 2003. - 656 с. : ил.

2.7 Поршнев С. В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD : учеб. пособие. - М. : Горячая линия : Телеком, 2002. - 252 с.

Методические пособия

3.1 Николаев Н.А. Сборник задач по математическому программи-рованию: Методическое пособие. Новоуральск, НГТИ, 2005. - 44 с.

3.2 Орлова И.В. Решение задач регрессионного анализа средствами MS Excel и MathCad. Методическое пособие. Новоуральск, НТИ НИЯУ МИФИ, 2012, 36 с.

3.3 Орлова И.В. Решение инженерных задач в Microsoft Excel 2003. Учебно-методическое пособие. Новоуральск, НТИ НИЯУ МИФИ, 2013, 60 с.

3.4 Орлова И. В. Электронная таблица Microsoft Office Excel 2003. Учебно-методическое пособие. Новоуральск, НГТИ, 2009, - 72 с.

3.5 Тихонова Е.В. Введение в MathCAD. Методическое пособие. - Новоуральск, НТИ НИЯУ МИФИ, 2012, - 80 с. :ил.

3.6 Тихонова Е.В. Решение задач в системе MathCAD. Методическое пособие. - Новоуральск, НТИ НИЯУ МИФИ, 2013, - 75 с. :ил.

3 Обучающие системы и электронная документация (каталог EDUCATION сервера кафедры)

4.1 Златопольский Д.М. 1700 заданий по Microsoft Excel– СПб.: BHV - Санкт-Петербург, 2003 – 544 с.: ил. Файл 1700 заданий по MicrosoftExcel.pdf

4.2 Ильина О.П. Информационные технологии анализа данных в Microsoft Office. – СПб.: Изд–во СПбГУЭ Ф, 2000. – 89с. Файл Анализ данных в MS Office.doc

4.3 Козырев А.А. Информационные технологии в экономике и управлении. Учебник. Файл ИТ в экономике и управлении (Козырев).doc

4.4 Методическое пособие по изучению электронных таблиц Microsoft Excel 97.Описание основных команд меню программы. Файл Excel_97.pdf.

4.5 Электронный учебник по работе в MathCAD 7 PRO. Файл Z:\EDUCATION\MathCad\MathCAD 7 PRO - электронный учебник.chm

4.6 Электронный учебник по работе в MathCAD 12. Файл Z:\EDUCATION\MathCad\MathCAD 12 - электронный учебник.chm

УДК 681.3.06

Автор: Орлова Ирина Викторовна

Вычислительные методы в решении инженерных задач. Учебно-методическое пособие по курсу «Вычислительные методы в решении инженерных задач» для преподавателей и студентов направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», заочной формы обучения.

Новоуральск, НТИНИЯУ МИФИ, 2018, 70 с.

Сдано в печать Формат А5 Бумага писчая
Печать плоская Уч.-изд.л. 1,7 Тираж 30 экз.
Заказ Издательство НТИ Лицензия ИД № 00751. г.Новоуральск, Ленина, 85.