

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Степанов Павел Иванович

Должность: Руководитель НТИ НИЯУ МИФИ

Дата подписания: 27.02.2026 07:57:10

Уникальный программный ключ:

8c65c591e26b2d8e460927740a12621a2b23

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

**НОВОУРАЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**Кафедра высшей математики**

**Ю.В.Орлов**

**Учебно-методический комплекс**

**дисциплины «Математика», 2 семестр**

**Учебно-методическое пособие**

|                                   |   |                                                                                        |
|-----------------------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------------|
| Направление подготовки            | — | 15.03.05 - "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств" |
| Профиль                           | — | Технология машиностроения                                                              |
| Квалификация (степень) выпускника | — | академический бакалавр                                                                 |
| Форма обучения                    | — | <b>заочная</b>                                                                         |

Новоуральск, 2024

Орлов Ю.В. Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины «Математика», 2 семестр для бакалавров заочной формы обучения профиля «Технология машиностроения».  
– Новоуральск, изд. НТИ НИЯУ МИФИ, 2024 – 88 с.

Пособие содержит выписку из рабочей программы дисциплины, контрольную работу (две части), методику оценки и справочник. Выдается студентам заочной формы обучения в начале семестра, вариант – номер студента в списке группы.

УМК составлен ст. преподавателем кафедры Высшей математики НТИ НИЯУ МИФИ ***Орловым Юрием Владимировичем.***

Пособие рассмотрено на заседании кафедры Высшей математики НТИ НИЯУ МИФИ

" \_\_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г. протокол № \_\_\_\_\_  
и рекомендовано для подготовки бакалавров.

Заведующий кафедрой высшей математики

Н.А. Носырев \_\_\_\_\_ « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

# Содержание

|     |                                                                                                   |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | Выписка из рабочей программы дисциплины                                                           |    |
| 1.1 | Структура и содержание учебной дисциплины .....                                                   | 4  |
| 1.2 | Планируемые результаты освоения образовательной программы, относящиеся к учебной дисциплине ..... | 5  |
| 1.3 | Компетенции, реализуемые при изучении дисциплины .....                                            | 6  |
| 2   | Контрольная работа                                                                                |    |
| 2.1 | Часть 1 «Пределы, непрерывность, производная функции одной переменной» .....                      | 8  |
| 2.2 | Пример решения части 1 .....                                                                      | 37 |
| 2.3 | Часть 2 «Интегрирование» .....                                                                    | 55 |
| 3   | Методика оценки достижений                                                                        |    |
| 3.1 | Балльно-рейтинговая система .....                                                                 | 60 |
| 3.2 | Вопросы экзамена .....                                                                            | 61 |
| 3.3 | Пример экзаменационного билета .....                                                              | 64 |
| 4   | Справочник .....                                                                                  | 65 |
| 5   | Рекомендуемая литература .....                                                                    | 81 |

Пособие предназначено для проведения типовой работы (домашней контрольной работы) в группах второго семестра первого курса заочной формы обучения по профилю «Технология машиностроения». Пособие содержит задания по темам «Предел, непрерывность, производная функции одной переменной» и «Интегрирование». Каждый студент находит свой порядковый номер  $N$  в списке группы, по нему выбирает вариант контрольного задания. Если номер  $N$  превосходит 30, то студент выполняет вариант задания под номером  $N - 30$ .

Контрольные выполняются в соответствии со стандартом оформления текстовых документов (рассмотрена в УМК 1 сем.). При решении контрольного задания рекомендуется воспользоваться конспектами лекций и литературой из приведённого в конце пособия списка.

# 1 Выписка из рабочей программы

дисциплины «Высшая математика» для подготовки бакалавров по направлению 15.03.05 – «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» направления «Технология машиностроения» заочной формы обучения

## 1.1 Структура и содержание учебной дисциплины

Семестр – 2 Трудоемкость 4 ЗЕТ, 135 ч., Экзамен

| №<br>п/<br>п | Название темы/раздела учебной дисциплины                             | Неделя семестра | Виды учебных занятий, и их трудоемкость (в часах) |                |                  |                | Ссылка на ПР УД         | Форма контроля  |
|--------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------|---------------------------------------------------|----------------|------------------|----------------|-------------------------|-----------------|
|              |                                                                      |                 | Лекции                                            | Практ. занятия | Лаборат. занятия | Самост. работа |                         |                 |
| 1            | 2                                                                    | 3               | 4                                                 | 5              | 6                | 7              | 8                       | 9               |
| 1.           | Пределы последовательностей и функций                                | 1-3             | 4                                                 | 4              |                  | 8              | 33,<br>У3,<br>В3        | Дз-2<br>Часть 1 |
| 2.           | Производная функции одной переменной                                 | 4-5             | 2                                                 | 2              |                  | 8              |                         |                 |
| 3.           | Свойства дифференцируемых функций                                    | 6-7             | 2                                                 | 2              |                  | 8              |                         |                 |
| 4.           | Исследование функций и построение их графиков. Задачи на оптимизацию | 8-10            | 4                                                 | 4              |                  | 8              |                         |                 |
| 5.           | Неопределенный и определённый интеграл, их связь                     | 11-12           | 2                                                 | 2              |                  | 8              | 33,<br>У3,<br>В3-<br>В4 | Дз-2<br>Часть 2 |
| 6.           | Основные методы интегрирования                                       | 13-14           | 2                                                 | 2              |                  | 8              |                         |                 |
| 7.           | Применения интегралов                                                | 15-16           | 2                                                 | 2              |                  | 6              |                         |                 |
| Итого:       |                                                                      |                 | 18                                                | 18             |                  | 54             |                         |                 |
| 8.           | Экзамен (Э-2)                                                        |                 | Контроль – 9 ч.                                   |                |                  |                |                         |                 |

Дз-2 «Задания по математике, 2 семестр»

часть 1 «Пределы, непрерывность, производная функции одной переменной»  
выдаётся на 2 нед., сдача на 11 нед.,

часть 2 «Интегрирование» выдаётся на 10 нед., сдача на 18 нед.

## 1.2 Планируемые результаты освоения образовательной программы, относящиеся к учебной дисциплине

В результате освоения дисциплины «Математика», 2 семестр студент должен:

| Код   |    | Результаты обучения                                           | Показатели оценки результатов                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------|----|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| знать | 33 | Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Знание определений и свойств пределов последовательностей и функций;</li> <li>- Знание определения, геометрического и физического смыслов производной для <math>f'(x)</math>;</li> <li>- Знание таблицы и правил вычисления производных;</li> <li>- Знание связи монотонности и выпуклости со знаками первой и второй производной;</li> <li>- Знание метода решения задач одномерной оптимизации;</li> <li>- Знание общего плана исследования функции одной переменной и построения её графика;</li> <li>- Знание определение первообразной, таблицы неопределённых интегралов и их свойств;</li> <li>- Знание методов вычисления основных видов интегралов (замена переменной, интегрирование по частям, рациональные дроби, тригонометрические функции);</li> <li>- Знание метода вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница;</li> <li>- Знание методов вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел с помощью определенного интеграла.</li> </ul> |
|       |    | Применять дифференциальное и интегральное исчисления          | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Умение вычислять пределы последовательностей и функций;</li> <li>- Умение находить производные функций с разным способом задания;</li> <li>- Умение находить максимум (минимум) функции;</li> <li>- Умение решать текстовые задачи на оптимизацию;</li> <li>- Умение исследовать функцию и построить её график;</li> <li>- Умение находить неопределённые интегралы;</li> <li>- Умение вычислять определённые интегралы;</li> <li>- Умение находить площадь фигуры и объём тел.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

|                |           |                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Владеть</b> | <b>В3</b> | Методами исследования функций и построения их графиков                               | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Владеть навыками вычисления пределов, включая случаи неопределённости;</li> <li>- Владеть навыками вычисления производных функций одной переменной с разными способами их задания;</li> <li>- Владеть навыками нахождения промежутков монотонности функции и их экстремумов;</li> <li>- Владеть навыком нахождения промежутков выпуклости функции и точек перегиба их графиков;</li> <li>- Владеть навыком нахождения асимптот графика функции;</li> <li>- Владеть навыком исследования функций и построения их графика;</li> <li>- Владеть навыками решения текстовых задач оптимизации.</li> </ul> |
|                | <b>В4</b> | Методами решения типовых задач геометрии и физики на основе интегрального исчисления | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Владеть методами вычисления основных видов неопределённых интегралов;</li> <li>- Владеть методами вычисления определённых интегралов;</li> <li>- Владеть заменой переменной и интегрирования по частям в неопределённых и определённых интегралах;</li> <li>- Владеть методами вычисления площадей плоских фигур с различными способами описания их границ;</li> <li>- Владеть методами вычисления объёма тел по поперечным сечениям и тел вращения.</li> </ul>                                                                                                                                      |

### 1.3 Компетенции, реализуемые при изучении дисциплины

| Код компетенции | Компетенции                                                                                                                                                                                      |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>УКЕ-1</b>    | Способен использовать знания естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в поставленных задачах     |
| <b>В14</b>      | Формирование глубокого понимания социальной роли профессии, позитивной и активной установки на ценности избранной специальности, ответственного отношения к профессиональной деятельности, труду |
| <b>В15</b>      | Формирование психологической готовности к профессиональной деятельности по избранной профессии                                                                                                   |

Навыки, полученные в данной дисциплине, помогают в изучении дисциплин, формирующих компетенцию **ОПК-1** «Способность использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления машиностроительных изделий требуемого качества, заданного количества при наименьших затратах общественного труда» и **ПК-3** «Способность участвовать в постановке целей проекта (программы), его задач при заданных критериях, целевых функциях, ограничениях, разработке структуры их взаимосвязей, определении приоритетов решения».

## 2 Контрольная работа

**Дз-2 часть 1** Домашняя контрольная работа по теме  
«Предел, непрерывность, производная функции одной переменной»  
выдаётся на 2 неделе, сдача на 13 неделе 2 семестра

**В КАЖДОМ ВАРИАНТЕ**

**№1 – 4 балла, №2 – 2 балла, №3: 1–2 б., 2– 1 б., 3–2 б., 4 –2б., 5 – 16 б.**

### Вариант №1

**№1** Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 - 4x^2 + 3x}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot (\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 + 1}) \right)$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x-3} \right)^{3x}$ .

**№2** Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ 2 & \text{при } -1 < x < 0 \\ x+1 & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi \\ 3 \sin(2x) & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

**№3**

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{\lg^3 2x \cdot (2x-1)^3}{\sqrt{1-x}};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 + t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (x^3 - 2)^{x-1}$ ;      б)  $x^3 - 3xy + 2y^3 + 2y + 1 = 0$ ;

4. Вычислить приближенно

$$\lg(99);$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x+1}{x+3}$ ;      б)  $s(t) = (2t+3) \cdot e^{-2(t+1)}$ .

## Вариант №2

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 + 4x}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x) - \sin(3)}{6 - 2x}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{x^2}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{при } x \leq -3 \\ \frac{1}{2x+6} & \text{при } -3 < x < 0 \\ (x-3)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{(x^3 + 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2)}{\ln 3x};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 2$

$$\begin{cases} x = 3 - 4t^3 \\ y = e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (1 - 2x^3)^{\sin x + 1}$ ;      б)  $\sin(2x) - x \cdot y^3 + 3y + 3 = 0$ ;

4. Вычислить приближенно

$$(1,95)^{10};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{2 - x^2}{x + 4}$ ;      б)  $s(p) = \frac{e^{2(p+1)}}{2(p+1)}$ .

### Вариант №3

№1 Вычислить пределы

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{5x^2 + 2x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{3x-3} \right)^{3x-x^2}$ ;
- 3)  $\lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot (\ln(s+1) - \ln(s+5)))$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{2}{x+2} & \text{при } -1 < x < 0 \\ -\cos(3x) & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{3 \cdot (x - x^2) + \arcsin x}{x^3 - 4};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = -1$

$$\begin{cases} x = t + 3t^2 \\ y = 2^{2t+2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (x-1)^{x+1}; \quad б) \operatorname{tg}(3x) + e^x \cdot y^4 + 3y = 1;$$

4. Вычислить приближенно

$$\cos 44^\circ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{x^2 - 2x}{3 - x}; \quad б) d(s) = 3 \cdot \ln\left(\frac{s}{s-3}\right) - 1.$$

## Вариант №4

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 4x + 1}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3t-1} - \sqrt{3t+2}}{6-2t}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 6x^2\right)^{\frac{x-3}{x^2}}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{при } -5 < x \leq -2 \\ (x-3)^2 & \text{при } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{2x+6} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{(x+1)^{10} + \arctg x}{\sin 4x};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^5 - 3t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (x^3 - 3)^{\lg 3x+1}$ ;      б)  $\arctg(5x-1) + x^2 \cdot y^3 - 3y = x$ ;

4. Вычислить приближенно

$$2^{0,98};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x}{x+4}$ ;      б)  $S(t) = (5-t) \cdot e^{t-2}$ .

## Вариант №5

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 3}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left( p^2 \cdot (\sqrt{p^2 - 3p} - \sqrt{p^2 + p}) \right)$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 - 3} \right)^{3x}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ (x+2)^2 - 2 & \text{при } -1 < x < 0, \text{ построить её график.} \\ 3 \sin(2x) & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \arccos((3x-2)^2) \cdot \ln(\cos x + 3) \cdot \operatorname{tg}^4(x);$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=2$

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t + 3t^3 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$f(x) = (4x-6)^{x-3}; \quad \text{б) } x \cdot e^{2x} + x^3 \cdot y^4 - 2\operatorname{tg}(y) = 0;$$

4. Вычислить приближенно

$$\cos(61^\circ);$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$\text{а) } y(x) = \frac{4-x^2}{x+3}; \quad \text{б) } H(t) = \frac{e^{2-t}}{2-t}.$$

## Вариант №6

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x) - \cos(1)}{x^2 - 1}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{4x-3} \right)^{-x^2}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & \text{при } x \leq -3 \\ \frac{3}{2x} + 2 & \text{при } -3 < x < 0 \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right) & \text{при } 0 \leq x < 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \frac{2}{\cos(2x-3) - 3} \right)^4 \cdot 3^{x-6} + \frac{2}{1-2x};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=2$

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = e^{-2+2t} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (1-2x^3)^{\sin x + 3}$ ;      б)  $x \cdot \cos(3x) - 2\sqrt{y} + 3y + 1 = 0$ ;

4. Вычислить приближенно

$$(1,95)^{10};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{2-x^2}{x+4}$ ;      б)  $D(k) = \ln\left(\frac{k}{k+2}\right) + 1$ .

## Вариант №7

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{y \rightarrow \infty} ((y+2) \cdot (\ln(y+1) - \ln(y+5)))$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+5}{x+1} \right)^{3-x^2}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 + x^2 - 2x}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{2}{x} - 2 & \text{при } -1 < x < 0 \\ 3 \cos(2x) & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = (2 - 3 \cos 4x)^4 \cdot \log_2(x^2 - 3x);$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 2$

$$\begin{cases} x = 2t^2 - t, \\ y = t - 1 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

a)  $f(x) = (3 - 2 \cos x)^{3-x}$ ;      б)  $2 \cos^3(x) + 2 \sin(3y) - 3y + 1 = 0$ ;

4. Вычислить приближенно

$$\sin(134^\circ);$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

a)  $y(x) = \frac{2-3x}{x+4}$ ;

б)  $K(t) = (t-2) \cdot e^{3-t}$ .

## Вариант №8

№1 Вычислить пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 0+} (1 - \sin(2x)) \frac{-3}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - 7x^3 + 6x^2}{3x^2 - 4x + 1} \text{ при } a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty;$$

$$3) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} + 3x^3 - 20 \cdot \lg(13x) - \sqrt{x+2}}{x \cdot \sqrt[3]{x^8 - x} + 0,8^x - 4 \cos(2x)}.$$

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+10} & \text{при } -5 < x \leq -2 \\ (x-3)^2 & \text{при } -2 < x < 0 \\ -2 \ln(x+1) & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \frac{2x}{\cos^2(2x-3) - 3} \right) \cdot 3^{x-6};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 2$

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = e^{-2+2t} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (4 + x^3)^{2x+3};$$

$$б) 2^{2x-1} + 3x \cdot y^7 - 5y + \sqrt{2} = 0;$$

4. Вычислить приближенно

$$\arcsin(0,995)$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{x^2}{3x-6};$$

$$б) x(y) = \frac{e^{2(y-1)}}{2(y-1)}.$$

## Вариант №9

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+1}{3x-3} \right)^{-5x}$ ;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot (\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + n}) \right)$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{4x^2 - 6x + 2}{x^4 - 4x^3 + 3x^2}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+10} & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ -4 & \text{при } -1 < x < 0 \\ \frac{x+1}{3 \sin(2x)} & \text{при } 0 \leq x < 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \ln^3 3x + 2x \right)^5 \cdot x;$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = t - 4 \\ y = t^3 - 2t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

a)  $f(x) = (2 + \ln(x))^{4x-3}$ ; б)  $x \cdot 2^x + x^3 \cdot y^2 - 3y + 1 = 0$ ;

4. Вычислить приближенно

$$\operatorname{arctg}(0,99);$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

a)  $y(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 4}$ ; б)  $L(p) = 3 - 3 \ln \left( \frac{p}{4 + p} \right)$ .

## Вариант №10

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{6x^3 - 2x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x) - \sin(3)}{6 - 2x}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 - 3} \right)^{x^2 - 2x}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \lg(-(3+x)) & \text{при } x < -3 \\ \frac{1}{2x-2} & \text{при } -3 < x < 0 \\ (x-3)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \frac{1-x}{x^2} \right)^4 \cdot \cos^3(x^3 - 4);$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 2$

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 3t; \\ y = t - 1 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (3x - 4)^{5x}$ ;      б)  $x^{\sqrt{2}} - x \cdot y + 3 \sin(y) + 1 = 0$ ;

4. Вычислить приближенно

$$(1,95)^{10};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{2-x^2}{x+4}$ ;      б)  $A(z) = -(2z+1) \cdot e^{2(z+1)}$ .

## Вариант №11

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x+10}{x-3} \right)^{3-2x^2};$

2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^2 + 5x - 6}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty;$

3)  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin^3(2x) + 3 \cdot e^{2x^3} - 3}{\operatorname{tg}(x^3) - x \cdot \sqrt{1-x^2}}.$

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{2}{x+2} & \text{при } -1 < x < 0 \\ \frac{-|x-1|}{x-1} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, x \neq 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{при } x = 1 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \frac{2}{\cos^3(4x-3)} \right)^4 \cdot 3x^{2-6};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=2$

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = e^{-2+2t} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (3 + 2x^3)^{2x+3};$  б)  $\log_2(2x-10) + \sqrt{2y} + 3y = 1;$

4. Вычислить приближенно

$$(2,03)^8;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 4};$  б)  $J(t) = \frac{e^{2(t+2)}}{2(t+2)}.$

## Вариант №12

### №1 Вычислить пределы

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 7x + 10}{3x^2 - 4x + 1}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 6x)^{\frac{-3}{\sin(2x)}}$ ;
- 3)  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3p-1} - \sqrt{3p+k}}{6-2p}$ .

### №2 Найти область определения функции $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } -4 \leq x \leq -2 \\ \frac{2}{x+2} & \text{при } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{2x+6} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

### №3

#### 1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{(x^3 + 3) \cdot \operatorname{tg} x}{\ln(3x-1)};$$

#### 2. Найти $y'_x$ и $y''_{xx}$ при $t = 2$

$$\begin{cases} x = 3 - 4t^3 \\ y = e^{t-2} \end{cases};$$

#### 3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (5x + 2)^{x-x^2}; \quad б) 3x^4 + x - 3y^4 + 3y = 2;$$

#### 4. Вычислить приближенно

$$\log_2(255,8);$$

#### 5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}; \quad б) F(s) = \ln\left(\frac{s}{s-2}\right) - 2.$$

### Вариант №13

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot (\sqrt{x^2 - 3p} - \sqrt{x^2 + 1}) \right);$

2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 3}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x} \right)^{3x - x^2}.$

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{при } -1 < x < 0, \text{ построить её график.} \\ 3 \sin(x-1) & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \sin^4 \left( 5x^2 - \frac{x}{1-x^2} \right) - \frac{\sqrt{7}}{x};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=2$

$$\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = 2 + (t - 2)^2 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (5x)^{2x - \sqrt{x}};$

б)  $\sqrt[3]{2-x} + \sin^2(y) + 3y - 4 = 0;$

4. Вычислить приближенно

$$\operatorname{tg}(134,78^\circ);$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x - 5};$

б)  $D(y) = \frac{2y + 5}{e^{2(y+2)}}.$

## Вариант №14

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{4x-3} \right)^{-x^2}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x^2 - a^2}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } -6 < x \leq -3 \\ (x+3)^2 & \text{при } -3 < x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{при } -3 < x \leq 0 \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right) & \text{при } 0 < x < 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = 2^4 \cdot \left( 5x^2 - \frac{x}{1+x^2} \right) - \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{x}\right) \cdot \frac{1}{x};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=0$

$$\begin{cases} x = 3 - 6t \\ y = t \cdot (t - 2)^2 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

a)  $f(x) = (x^2 + 1)^{2\sqrt{x}}$ ;

б)  $x \cdot \sin(x) \cdot y^3 + 2y = 3$

4. Вычислить приближенно

$$\sqrt[3]{-7,85};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

a)  $y(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3}$ ;

б)  $C(h) = \frac{e^{3-h}}{3-h}$ .

## Вариант №15

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{4x+1} \right)^{3-x}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+5) \cdot (\ln(x+3) - \ln(x+1)))$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 8}{x^3 + x^2 - 6x}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=+\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ -2 & \text{при } -1 < x < 0, \text{ построить её график.} \\ (1-x)^3 & \\ 2\cos(2x) & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \arcsin(x^3 \cdot \sqrt[5]{\lg(3x-1)}) - \sqrt[2]{3-4e^2};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=2$

$$\begin{cases} x = (2t-1)^2 \\ y = (t-1) \cdot \sin(t-2) \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (3x+2)^{-\ln x}$ ;

б)  $x^{-3} + 2 \sin(3y) - 4y + x = 1$ ;

4. Вычислить приближенно

$$\sqrt[4]{257};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x}$ ;

б)  $P(t) = 2 \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) - 1$ .

## Вариант №16

№1 Вычислить пределы

$$1) \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3x^3 - 20 \cdot \log_3(13x) - \sqrt{x^2 + 2}}{x \cdot \sqrt[3]{x^5 - x^2} + 0,8^{-x} - 4 \cos^2(x)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - 16}{3x^2 - 4x - 4} \text{ при } a_1 = -2, a_2 = 2, a_3 = -1, a_4 = -\infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + \operatorname{tg}(2x))^{\frac{3}{x}}.$$

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{при } -5 < x \leq -2 \\ (x-3)^2 & \text{при } -2 < x < 0 \\ 2 \lg(x+2) & \text{при } x \geq 0, x \neq 8 \\ 0 & \text{при } x = 8 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \sin^3(x^2 - 4) - \cos(2) \right) \cdot \log_3(x^4 - 2 \arcsin(0,4));$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 2$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 3 \cdot \ln t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (x^2 + 3)^{x+3x^3}; \quad б) x^{6-x} \cdot y^5 + 3y = 3;$$

4. Вычислить приближенно

$$\operatorname{tg}(134,6^\circ);$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}; \quad б) E(s) = (4 - s) \cdot e^{s-3}.$$

## Вариант №17

№1 Вычислить пределы

- 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n \cdot (\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 + n}) \right);$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 + 4x^2 - 7x}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty;$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x-3} \right)^{3x^2}.$

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{2}{x+1} & \text{при } -1 < x < 0 \\ 2\cos(x) & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = 2^{x^2 \cdot \cos(3x-4)} \cdot \left( \operatorname{tg}(1) - \frac{3}{4x-2} \right);$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=2$

$$\begin{cases} x = t + t^3 \\ y = (t-1)^2 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (x + 3x^4)^{x+3}; \quad б) \frac{1}{x-1} + x^2 \cdot y^3 - 4y + 2 = 0;$$

4. Вычислить приближенно

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8,02}};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{x-1}{2x+2}; \quad б) L(k) = -\frac{e^{-2(k+2)}}{2(k+2)}.$$

## Вариант №18

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 + 4x}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{x^2}$  ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2(x-2) + \sqrt{2x-3}}{\operatorname{tg}^3(4-2x)}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 4x+10 & \text{при } -5 < x \leq -3 \\ \frac{6}{2x+6} & \text{при } -3 < x < 0 \\ (x-3)^2 - 2 & \text{при } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \operatorname{tg}^2(x^2 - 4) - 4 \right) \cdot 2^{x^4 - 2 \arcsin(0.3)} ;$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = t^2 + 3t \\ y = 3e^{2t-2} \end{cases} ;$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = x^{2-3x^2}$  ;

б)  $y^4 - 3x \cdot e^{3x} + y - 12 = 0$  ;

4. Вычислить приближенно

$$\sqrt{120,6} ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{3x^2 - 3}{x + 2}$  ;

б)  $S(h) = 2 \ln \left( \frac{h+3}{h} \right) - 3$ .

## Вариант №19

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{s \rightarrow +\infty} ((1-s) \cdot (\ln(s+5) - \ln(s+5)))$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{5x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x+1}{3x-3} \right)^{3x-x^2}$ ;

3).

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{при } -4 < x \leq -1 \\ \frac{2}{x+1} & \text{при } -1 < x < 0 \\ 3\cos(2x) - 1 & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \arctg(x^5 - 3x) \cdot \frac{\sin^3(3)}{\sqrt[5]{2x-4}};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=2$

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 3(t + 2t)^2 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

a)  $f(x) = (x + 5x^2)^{-x^2}$ ;

б)  $y \cdot \arctg(2x) - 4y^4 + 3 = x$ ;

4. Вычислить приближенно

$$(1.005)^{10};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

a)  $y(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x}$ ;

б)  $F(y) = (2y-1)e^{2(1-y)}$ .

## Вариант №20

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 6x^2)^{\frac{x-3}{x^2}} ;;$

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + 3n^2 - 4\sqrt{3n+2}}{6 - 2n^8 + 10^n} ;$

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - x^2}{3x^2 - 4x + 1}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & \text{при } -5 < x \leq -2 \\ \sin(x + 2) & \text{при } -2 < x < 0 \\ 1 & \text{при } x \geq 0, x \neq 2 \\ \frac{2x - 4}{2} & \text{при } x = 2 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = 2^{\sqrt{3} \cdot \log_3(3x^2 - 5x)} \cdot \sin(\sqrt{x});$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 1$

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 3e^{t-1} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = x^{-3x^2 - x};$$

$$б) 3x^{-7} + \frac{2y}{3x-2} + 1 = 0;$$

4. Вычислить приближенно  $\arctg(0,995)$ ;

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 2x^2};$$

$$б) X(p) = \frac{e^{-(p+2)}}{p+2}.$$

## Вариант №21

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 - 3} \right)^{3x}$  ;

2)  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left( p^2 \cdot (\sqrt{p^2 - 3p} - \sqrt{p^2 + p}) \right)$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x}{x^3 - 27}$  при  $a_1=0, a_2=3, a_3=-1, a_4=-\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot \frac{1}{x+5} + 3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ (x+2)^2 - 2 & \text{при } -1 < x < 0 \\ 2 & \text{при } x = 0 \\ 3 \log_{0,5}(2x) & \text{при } 0 < x \leq 2 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \frac{2 \sin(6x - 1) + 1}{\cos^3(2x + 3)} \right)^3 ;$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 1$

$$\begin{cases} x = 3t^2 + t \\ y = e^{-2+2t} \end{cases} ;$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (x-2)^{\sin x + 3}$  ;                      б)  $\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 3y^4 + 2$  ;

4. Вычислить приближенно

$$(2.001)^{10} ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$  ;                      б)  $Z(t) = 2 \ln\left(\frac{t}{t-4}\right) - 3$  .

## Вариант №22

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{a - x}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x+1}{4x-3} \right)^{-x^2}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-x} & \text{при } -5 \leq x \leq -3 \\ \frac{3}{2x} + 2 & \text{при } -3 < x < 0 \\ 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right) & \text{при } 0 \leq x < 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \frac{2x}{\cos^3(2x-3) - 3} \right)^4 ;$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=2$

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = e^{-2+2t} \end{cases} ;$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (1-2x^3)^{\sin x + 3}$  ;      б)  $\frac{x}{2x-1} - \sin^2(y) - 3y + 2 = 0$  ;

4. Вычислить приближенно

$$(1,95)^{10} ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{2-x^2}{x+4}$  ;      б)  $F(s) = -(s+1) \cdot e^{(s+2)}$ .

## Вариант №23

№1 Вычислить пределы

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+5}{x+1} \right)^{3-x^2}$  ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-3)^{20} + (2n-1)^{10}}{3n^{20} - 2n^4 - 4}$  ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 + 3x^2 - 2x}$  при  $a_1=0, a_2=-2, a_3=-1, a_4=+\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{2}{x} - 2 & \text{при } -1 < x < 0 \\ 1 - \cos(3x) & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \sqrt{2 - \frac{2}{\arcsin(x - 2^{3x})}} + 4 \cos(2 - \sqrt{3}) ;$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 1$

$$\begin{cases} x = 2t^2 - t \\ y = \ln(3t - 2) \end{cases} ;$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (1 - \lg(2x))^{4x} ; \quad б) x \cdot \operatorname{arctg}(2x) - 4x \sin(3y) + y = 1 ;$$

4. Вычислить приближенно

$$\operatorname{arctg}(1.05) ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{-x^2}{x^2 - 9} ; \quad б) K(h) = \frac{e^{h+3}}{h+3} .$$

## Вариант №24

№1 Вычислить пределы

$$1) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} + 3x^3 - 20 \cdot \lg(13x) - \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x^{10} - x} + 0,8^x - (2x-3)^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - 7x^3 + 6x^2}{3x^2 - 4x + 1} \text{ при } a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0+} (1 + \sin(3x)) \frac{-3}{x}.$$

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+4} & \text{при } -5 < x \leq -2 \\ 1 + (x-2)^2 & \text{при } -2 < x < 0 \\ 2 \ln(x+1) & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \cos((3x-2)^2) \cdot (\cos^6(2x) + 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3x-2}};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = 2 - t^2 \\ y = e^{t-1} + 3t^3 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (1 + \sqrt{x})^{3x-2}; \quad б) x \cdot \arctg(3x+1) - 2x^2 \sqrt[3]{y+1} = 3;$$

4. Вычислить приближенно

$$\cos 121^\circ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{4-x^2}{x+3}; \quad б) D(s) = \ln\left(\frac{s}{s+5}\right) - 1.$$

## Вариант №25

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot (\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 + 3n}) \right);$

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{3x-3} \right)^{-5x+1};$

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{4x^2 - 6x + 2}{4x^4 - 4x^3}$  при  $a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{2x+10} & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ 2 \sin(x+1) & \text{при } -1 < x < \pi - 1 \\ -3 & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi, x \neq \pi \\ \frac{x-\pi}{2} & \text{при } x = \pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \log_3(x - \operatorname{arctg}(x \cdot 2^{3x}));$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = 3t - 2t^2 \\ y = t + 3t^3 \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (4x^2 - 6)^x; \quad б) \frac{\sin(2x)}{x} + \sqrt{\frac{3}{y-1}} + 1 = 0;$$

4. Вычислить приближенно

$$(2,02)^{-3};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+3}; \quad б) F(c) = -(2c+3) \cdot e^{2(c+2)}.$$

## Вариант №26

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x) - \sin(3)}{6 - 2x}$

2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{6x^3 - 2x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 - 3} \right)^{x^2 - 2x}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}(x) & \text{при } x < -3, x \neq \pi \cdot n \\ 3 & \text{при } x < -3, x = \pi \cdot n \\ \frac{1}{2x-2} & \text{при } -3 < x < 0 \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{2 \cdot (2x - 1)^3}{\sqrt{1 - x}};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 1$

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 1 \\ y = t^2 + t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (x^2 - 2)^{4x-1}$ ;      б)  $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - y \cdot \cos(3y) + x = 1$ ;

4. Вычислить приближенно

$$\sqrt[3]{-64,2}$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3}$ ;

б)  $J(t) = -\frac{e^{-2(t-1)}}{2(1-t)}$ .

## Вариант №27

№1 Вычислить пределы

$$1) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sin^3(2x) + 3 \cdot e^{2x} - 3}{\operatorname{tg}\left(\frac{2}{x}\right) - x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 5x^2 - 6x} \text{ при } a_1=0, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x+10}{4x-3} \right)^{3+x^2}.$$

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{при } x \leq -3 \\ \frac{2}{x+3} & \text{при } -3 < x < 0 \\ \frac{|x-3|}{x-3} & \text{при } 0 \leq x \leq 5, x \neq 3 \\ 2 & \text{при } x = 3 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{(x^3 + 3) \cdot \operatorname{tg}(x^2)}{1 + e^{3x-2}};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = 2$

$$\begin{cases} x = 3 - 4t^3 \\ y = e^{t-2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (1-2x^3)^{\sin x+1}; \quad б) (x \cdot \sin(x) + 1) \cdot (y^3 - 3y) + x = 1;$$

4. Вычислить приближенно

$$(1,95)^{10}$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{4-x^2}{x+4}; \quad б) Y(p) = \ln\left(\frac{p-5}{p}\right) + 2.$$

## Вариант №28

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + k}}{6 + 2n};$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0-0} (1 + 6x)^{\frac{2}{\sin(2x)}};$

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 4x^2}{3x^2 - 4x + 1}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+3)^2 & \text{при } -4 \leq x \leq -2 \\ -2 & \text{при } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{(x+2)^2} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{3 \cdot (x - x^2) + \arcsin(\sqrt{2} - 1)}{x^3 - 4};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t = -1$

$$\begin{cases} x = t^3 + 3 \\ y = 2^{2t+2} \end{cases};$$

3. Найти производную функции

а)  $f(x) = (x-1)^{x-5x^2};$  б)  $3\operatorname{tg}(2x) \cdot \ln(2x) - \sqrt{y^3 - 3y} + 3 = 1;$

4. Вычислить приближенно

$$\cos 44^\circ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{x^2 - 4x}{3 - x};$  б)  $G(t) = (t + 4) \cdot e^{-(t+3)}.$

## Вариант №29

№1 Вычислить пределы

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot (\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 1}) \right);$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x - 6}{5x^2 + x - 6}$  при  $a_1=6, a_2=1, a_3=-1, a_4=-\infty;$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+5}{x-3} \right)^{-x^2}.$

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{при } -5 < x \leq -1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{при } -1 < x < 0 \\ 3 \sin(2x-1) & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{3} + 1 \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{(x+1)^{10} - \operatorname{arctg}(2x)}{2 - e^{3x}};$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^5 - 3t \end{cases};$$

3. Найти производную функции

$$a) f(x) = (x^3 - 3)^{\lg 3x+1}; \quad б) \cos\left(\frac{2x}{x-1}\right) \cdot y^3 - 2y + 1 = 0;$$

4. Вычислить приближенно

$$4^{0,98};$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$a) y(x) = \frac{0,5 \cdot x^2}{x+4}; \quad б) F(h) = \frac{e^{h-3}}{h-3}.$$

## Вариант №30

№1 Вычислить пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 8x}{3x^2 - 4x + 4}$  при  $a_1=0, a_2=2, a_3=-1, a_4=-\infty$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{\sin\left(\frac{1}{2x}\right)}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x) - 2}{x^2 - x}$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{(x+3)^2} & \text{при } -6 < x \leq -3 \\ (2x+4)^2 & \text{при } -3 < x \leq 0 \\ 2 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right) & \text{при } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \left( \frac{2\sin(4x-1)}{\cos^3(x+3) - 2} \right)^2 ;$$

2.. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$  при  $t=1$

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = e^{-2+3t} \end{cases} ;$$

3. Найти производную функции

a)  $f(x) = (2x-2)^{\sin(2x)+3}$  ;      б)  $x-3\cos^6(2x) + x \cdot y^6 - y = 0$

4. Вычислить приближенно

$$(4.001)^3 ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

a)  $y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4}$  ;      б)  $A(y) = \ln\left(\frac{y+6}{y}\right) - 1$ .

**2.**

## 2.2 Пример решения части 1

### Вариант №31

№1 Вычислить пределы

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+3}{3x+1} \right)^{3-2x^2}$  ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x^2+5) \cdot (\ln(x+8) - \ln(x-1)) \right)$  ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 15x}$  при  $a_1=1, a_2=0, a_3=3, a_4=-\infty$ .

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{-2}{(1+x)^3} + 5 & \text{при } -1 < x < 0 \\ 1 + 2\cos(2x) & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

№3

1. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 2x \cdot \ln 5x}{\sin 5x} ;$$

2. Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$ , составить уравнения касательной и нормали

$$\text{при } t = \frac{\pi}{2} \text{ для } \begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 + 3t \end{cases} ;$$

3. Найти производную функции

$$\text{а) } f(x) = (3 + \sin x)^{4x+2} ; \quad \text{б) } 2x^5 - 3xy^3 - 2y^4 - 1 = 0 ;$$

4. Вычислить приближенно

$$\cos 59^\circ ;$$

5. Провести полное исследование функции и построить график

$$\text{а) } y(x) = \frac{2x^2}{x-1} ; \quad \text{б) } S(t) = (3-t) \cdot e^{t-2} .$$

№1 Вычислить пределы

$$1.1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+3}{3x+1} \right)^{3-2x^2}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+3}{3x+1} \right)^{3-2x^2} &= \left[ \begin{array}{c} 1^\infty \\ \text{применим 2й} \\ \text{замечательный предел} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(3x+1)+2}{3x+1} \right)^{3-2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{3x+1} \right)^{3-2x^2} = \left[ \begin{array}{c} \alpha = \frac{2}{3x+1} \\ \alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{выделим в показателе } \frac{1}{\alpha} \end{array} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{3x+1} \right)^{\frac{3x+1}{2} \cdot \frac{2}{3x+1} \cdot (3-2x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{2}{3x+1} \right)^{\frac{3x+1}{2}} \right)^{\frac{2}{3x+1} \cdot (3-2x^2)} = \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{2}{3x+1} \right)^{\frac{3x+1}{2}} \right) \right\}^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x+1} \cdot (3-2x^2)} = \left[ \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \right] = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x+1} \cdot (3-2x^2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6-4x^2}{3x+1}} = \left[ \frac{6-4x^2}{3x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+3}{3x+1} \right)^{3-2x^2} = 0;$$

$$1.2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x^2 + 5) \cdot (\ln(x+8) - \ln(x-1)) \right).$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x^2 + 5) \cdot (\ln(x+8) - \ln(x-1)) \right) &= \left[ \begin{array}{c} \text{Свойство} \\ \text{логарифма} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x^2 + 5) \cdot \ln \left( \frac{x+8}{x-1} \right) \right) = \\ &= \left[ \frac{x+8}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x^2 + 5) \cdot \ln \left( \frac{x-1+9}{x-1} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x^2 + 5) \cdot \ln \left( 1 + \frac{9}{x-1} \right) \right) = \\ &= \left[ \begin{array}{c} \frac{9}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \ln(1+\alpha) \sim \alpha \\ \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x^2 + 5) \cdot \frac{9}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x-1} \right) = +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (x^2 + 5) \cdot (\ln(x+8) - \ln(x-1)) \right) &= 0; \end{aligned}$$

$$1.3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 15x} \quad \text{при } a_1=1, a_2=0, a_3=3, a_4=-\infty.$$

Решение: 1.3.1  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 15x} = \frac{2 - 5 - 3}{1 + 2 - 15} = \frac{-6}{-12} = 0,5;$

$$1.3.2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 15x} = \left[ \frac{0 + 0 - 3}{0 + 0 + 0} = \frac{-3}{0} \right] = \infty;$$

$$\begin{aligned} 1.3.3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 15x} &= \left[ \frac{18 - 15 - 3}{27 + 18 - 45} = \frac{0}{0} \right] = \left[ \begin{array}{c} x = 3 - \text{корень} \\ \text{числителя и знаменателя} \\ \text{разложим их на множители} \end{array} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \cdot (x-3) \cdot (x+0,5)}{x \cdot (x-3)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \cdot (x+0,5)}{x \cdot (x+5)} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 \cdot (3+5)} = \frac{7}{24}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.3.4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 15x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty}, \text{разделим дробь на } x^3 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{x} - 15 \cdot \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0 - 15 \cdot 0} = 0. \end{aligned}$$

Можно вычислить предел частного двух многочленов из условия, что наибольшая степень дроби находится в знаменателе. Такой предел на бесконечности равен нулю.

Ответ: 1) 0,5; 2)  $\infty$ ; 3)  $\frac{7}{24}$ ; 4) 0.

№2 Найти область определения функции  $y=f(x)$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{при } -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{-2}{(1+x)^3} + 5 & \text{при } -1 < x < 0 \\ 1+2\cos(2x) & \text{при } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \text{ построить её график.}$$

Исследовать функцию на непрерывность и определить вид её точек разрыва (вычислив каждый из частичных пределов).

*Решение :*

2.1) Значения функции  $f(x)$  можно вычислить при  $x \in [-5; -1]$ ,  $x \in (-1; 0)$ ,  $x \in [0; \pi]$ . Функция  $f(x)$  на каждом участке области определения задана (нет точек, в которых невозможно вычислить  $f(x)$ ), объединение всех участков даёт для функции  $f(x)$  область определения  $D_f = [-5; \pi]$  т.к.  $[-5; -1] \cup (-1; 0) \cup [0; \pi] = [-5; \pi]$  ;

2.2) Построим график функции, построив графики

- $y_1 = x - 3$  при  $x \in [-5; -1]$ ,
- $y_2 = \frac{-2}{(x+1)^3} + 5$  при  $x \in (-1; 0)$ ,
- $y_3 = 1 + 2\cos(2x)$  при  $x \in [0; \pi]$ .

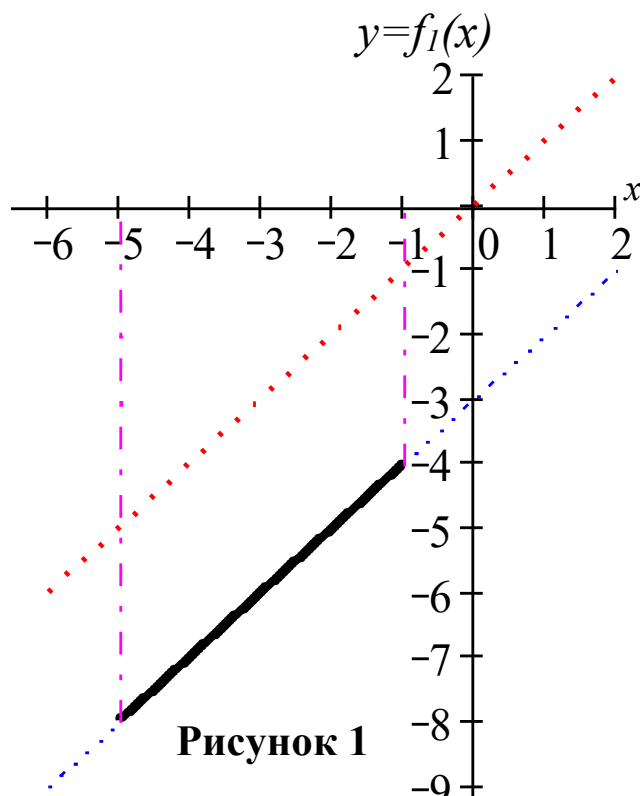


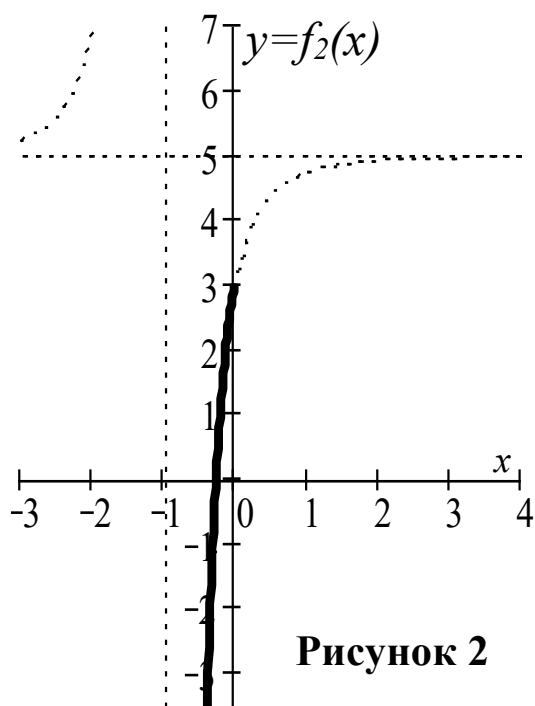
Рисунок 1

График  $y_1 = x - 3$  – прямая, с угловым коэффициентом  $k=1$  и сдвигом вниз относительно начала координат на  $b=3$ . Прямую можно построить и по двум точкам:

- а) взять  $x_1$  и вычислить  $y(x_1)$ , например при  $x = -5$   $y(-5) = -5 - 3 = -8$ ;
- б) взять  $x_2$  и вычислить  $y(x_2)$ , например при  $x = -1$   $y(-1) = -1 - 3 = -4$ ;
- в) построить прямую по найденным точкам  $(-5; -8)$  и  $(-1; -4)$ .

График функции изобразим на промежутке  $x \in [-5; -1]$ , на котором задана функция  $y_1$ .

График функции  $y_1 = x - 3$  показан на рисунке 1.



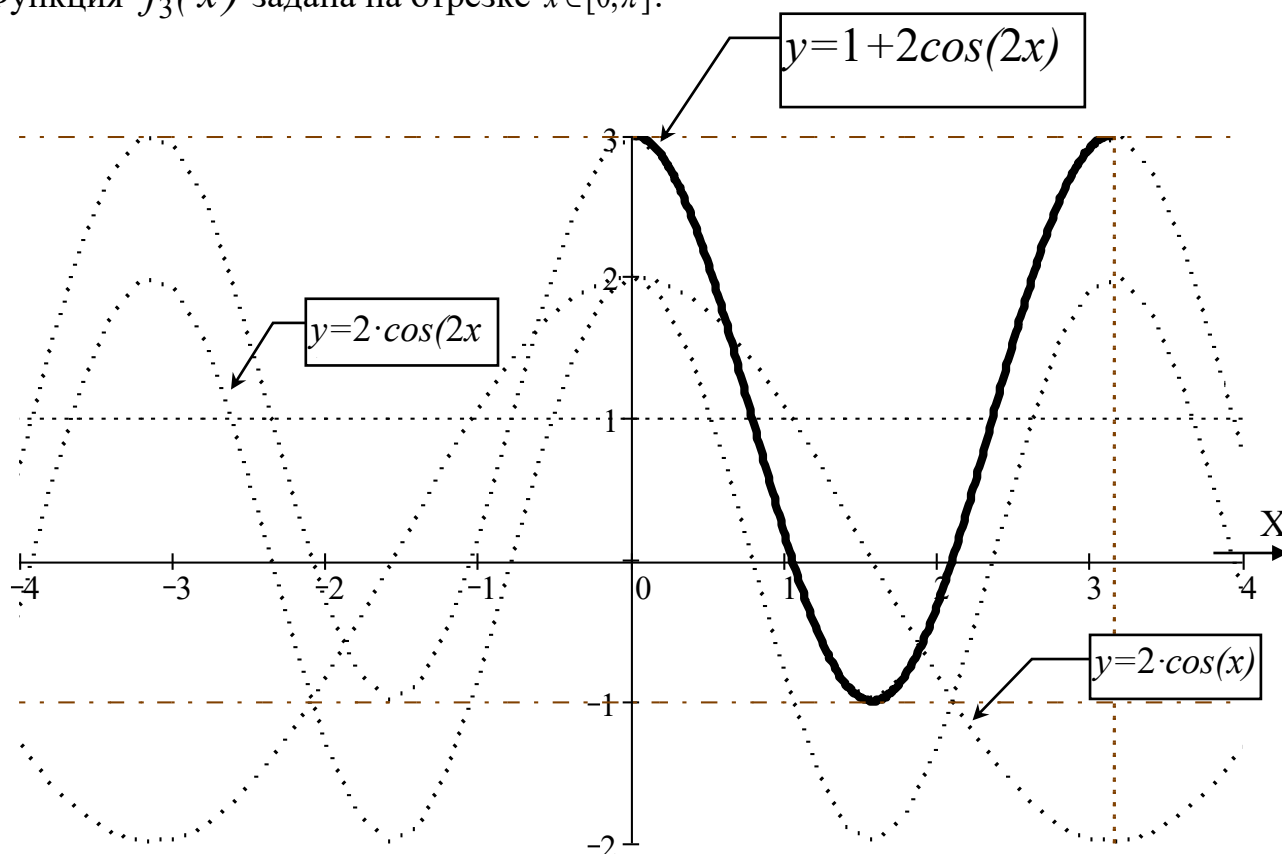
**Рисунок 2**

График  $y_2 = \frac{-2}{(x+1)^3} + 5$  – гипербола, получаемая из  $y = \frac{1}{x^3}$  растяжением в 2 раза вдоль оси ОУ вместе с переворотом относительно ОХ, сдвигом влево на 1 и вверх на 5 единиц. Функция  $y_2(x)$  задана на интервале  $x \in (-1; 0)$ .

График  $y = f_2(x)$  показан на рисунке 2.

График  $y_3 = 2\cos(2x) + 1$  получается из графика  $y = \cos(x)$  сжатием в 2 раза вдоль оси ОХ, растяжением в 2 раза вдоль оси ОУ и сдвигом вверх на 1 единицу. График  $y = f_3(x)$  показан на рисунке 3.

Функция  $f_3(x)$  задана на отрезке  $x \in [0; \pi]$ .



**Рисунок 3**

2.3) Исследуем функцию  $f(x)$  на непрерывность.

Функция  $y_1 = x - 3$  задана на отрезке  $x \in [-5; -1]$ . Функция  $y_1(x)$  является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции в точках соответствующего интервала  $(-5; -1)$ .

Функция  $y_2 = \frac{-2}{(x+1)^3} + 5$  задана на интервале  $x \in (-1; 0)$ , в его точках функция

$y_2(x)$  является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции.

Функция  $y_3 = 1 + 2 \cdot \cos(2x)$  задана на отрезке  $x \in [0; \pi]$ . Функция  $y_3(x)$  является элементарной, из чего следует непрерывность такой функции. в точках соответствующего интервала  $(0; \pi)$ .

Вывод: Разрывы функции  $f(x)$  возможны только на границах участков области определения.

Рассмотрим каждую из границ области определения  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = \pi$ .

2.3.1)  $x = -5$ ,  $f(-5) = \left[ 1^{\text{я строка}} \right] = -5 - 3 = -8$ .

Функция  $f(x)$  задана только при  $x \geq -5$ ,

предел справа  $\lim_{x \rightarrow -5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5+0} (x - 3) = -5 - 3 = -8$  существует, конечен

и равен  $f(-5)$  т.е.  $f(x)$  в точке  $x = -5$  непрерывна справа;

2.3.2)  $x = -1$ ,  $f(-1) = \left[ 1^{\text{я строка}} \right] = -1 - 3 = -4$ .

Предел слева  $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \left[ 1^{\text{я строка}} \right] = \lim_{x \rightarrow -1-0} (x - 3) = -1 - 3 = -4$ ,

предел справа  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \left[ 2^{\text{я строка}} \right] = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left( \frac{-2}{(x+1)^3} + 5 \right) = [-\infty + 5] = -\infty$ .

Среди частичных пределов в точке  $x = -1$  имеется бесконечный,  $x = -1$  является точкой разрыва второго рода;

2.3.3)  $x = 0$ ,  $f(0) = \left[ 3^{\text{я строка}} \right] = 1 + 2 \cdot \cos(0) = 1 + 2 = 3$ .

Предел слева  $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \left[ 2^{\text{я строка}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left( \frac{-2}{(x+1)^3} + 5 \right) = \frac{-2}{1} + 5 = 3$ ,

предел справа  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \left[ 3^{\text{я строка}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + 2 \cos(2x)) = 1 + 2 \cos(0) = 3$ .

В точке  $x = 0$  частичные пределы совпадают и равны значению функции в такой точке, следовательно  $x = 0$  – точка непрерывности функции  $f(x)$ ;

2.3.4)  $x = \pi$ ,  $f(\pi) = \left[ 3^{\text{я строка}} \right] = 1 + 2 \cos(2 \cdot \pi) = 1 + 2 = 3$ .

Функция  $f(x)$  задана только при  $x \leq \pi$ ,

предел слева  $\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi-0} (1 + 2 \cos(2x)) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$  существует,  
 конечен и равен  $f(\pi)$  т.е.  $f(x)$  в точке  $x = \pi$  непрерывна слева.

С учётом выполненных пунктов построим график функции  $f(x)$ .  
 График изображён на рисунке 4.

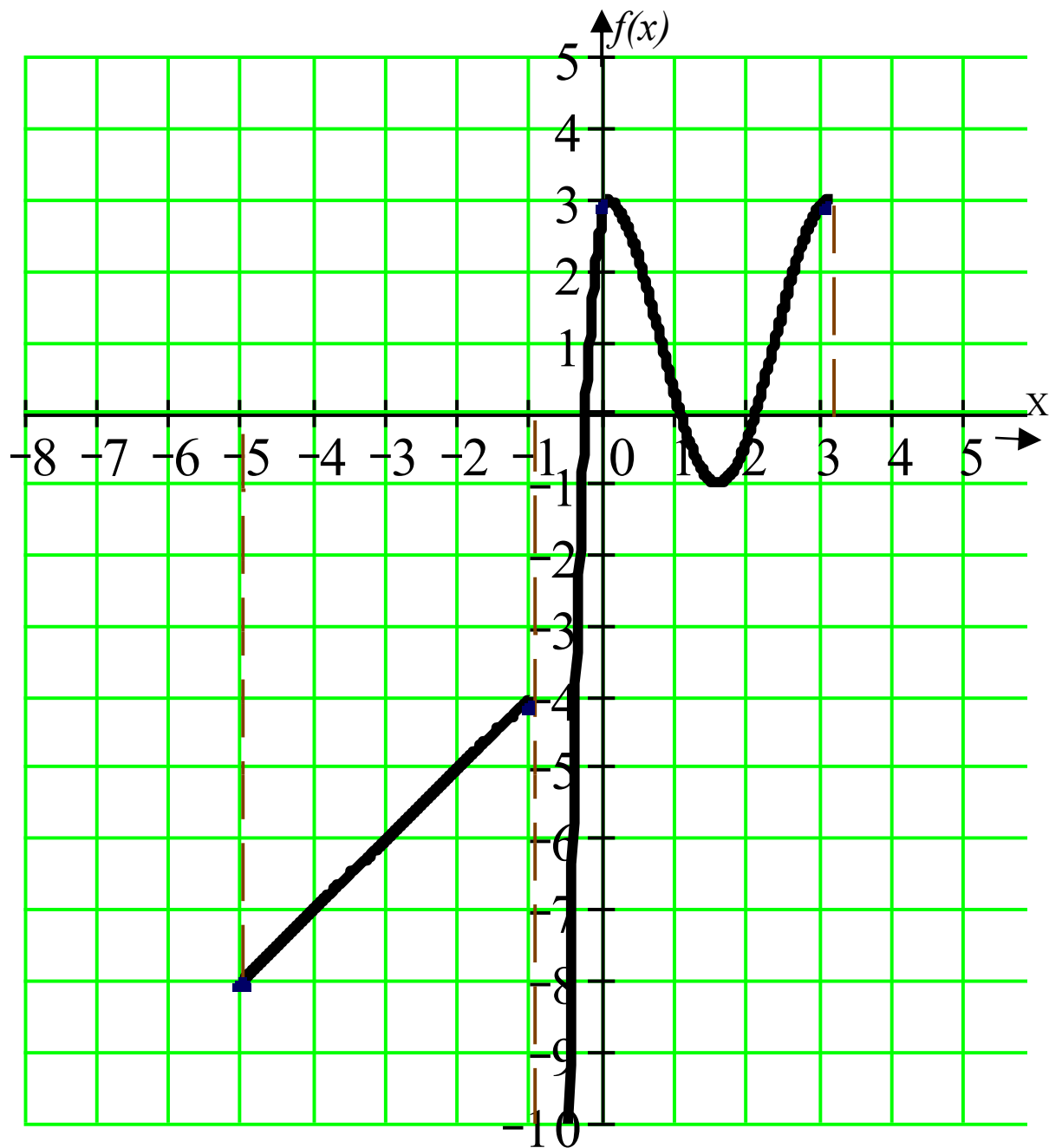


Рисунок 4

№3

3.1) Найти производную функции  $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 2x \cdot \ln 5x}{\sin 5x}$ .

Решение:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{\operatorname{tg}^3 2x \cdot \ln 5x}{\sin 5x} \right)' = \frac{(\operatorname{tg}^3 2x \cdot \ln 5x)' \cdot \sin 5x - (\operatorname{tg}^3 2x \cdot \ln 5x) \cdot (\sin 5x)'}{\sin^2 5x} = \\ &= \frac{\left( \left( 3\operatorname{tg}^2 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 \right) \cdot \ln 5x + \operatorname{tg}^3 2x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 \right) \cdot \sin 5x - (\operatorname{tg}^3 2x \cdot \ln 5x) \cdot \cos 5x \cdot 5}{\sin^2 5x} = \\ &= \frac{\left( -6 \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x} \cdot \ln 5x + \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{x} \right) \cdot \sin 5x - 5\operatorname{tg}^3 2x \cdot \ln 5x \cdot \cos 5x}{\sin^2 5x}; \\ \text{Ответ: } f'(x) &= \frac{\left( -6 \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x} \cdot \ln 5x + \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{x} \right) \cdot \sin 5x - 5\operatorname{tg}^3 2x \cdot \ln 5x \cdot \cos 5x}{\sin^2 5x}. \end{aligned}$$

3.2) Найти  $y'_x$  и  $y''_{xx}$ , составить уравнения касательной и нормали

при  $t = \frac{\pi}{2}$  для  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 + 3t \end{cases}$ ;

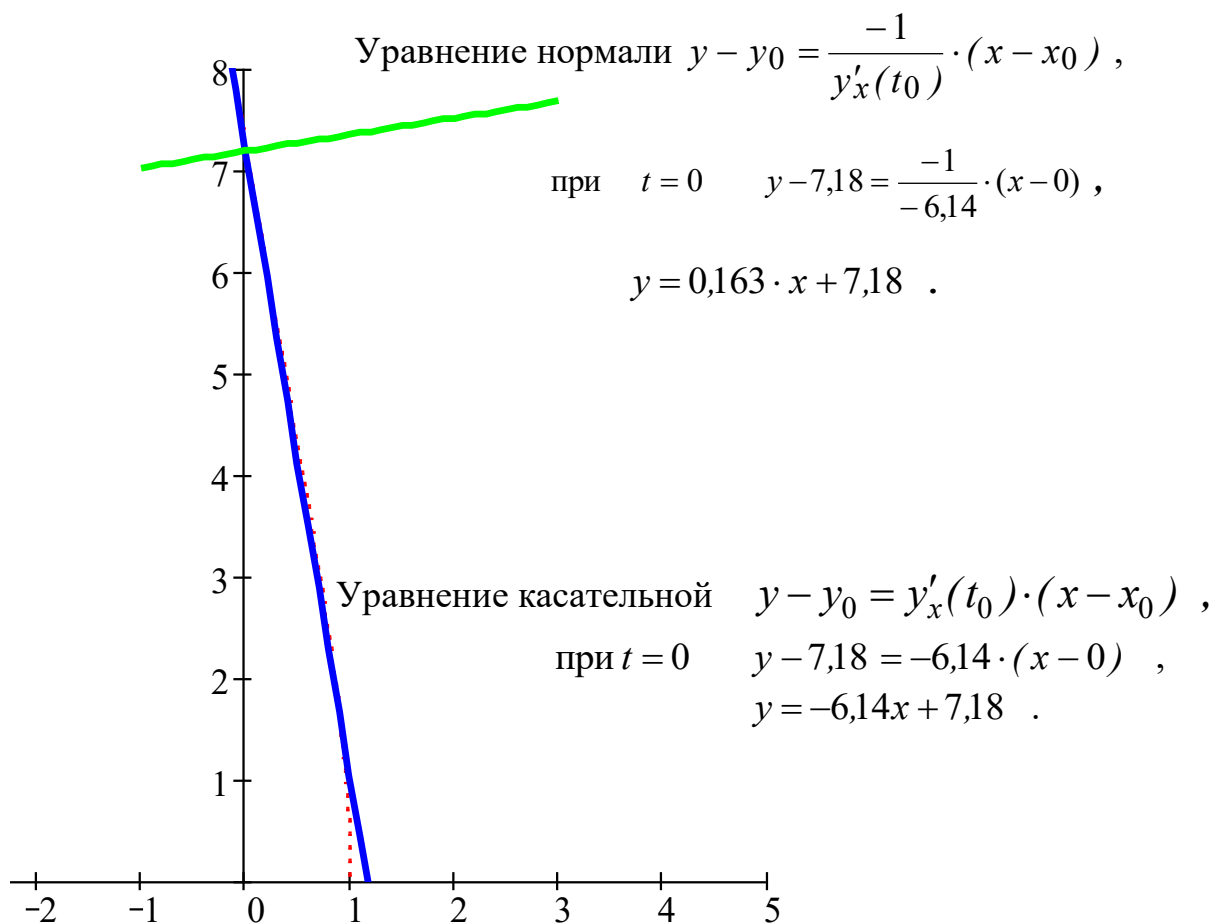
Решение:

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2 + 3t)'}{(\cos t)'} = \frac{2t + 3}{-\sin t}, \\ y''_{xx} &= (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left( \frac{2t + 3}{-\sin t} \right)' \cdot \frac{1}{-\sin t} = \frac{2 \cdot (-\sin t) - (2t + 3) \cdot (-\cos t)}{-\sin^3 t} = \\ &= \frac{2 \sin t - (2t + 3) \cdot \cos t}{\sin^3 t}. \end{aligned}$$

При  $t = \frac{\pi}{2}$   $y'_x = \frac{\pi + 3}{-1} = -\pi - 3 \approx -6,14$ ,  $y''_{xx} = \frac{2}{1} = 2$ ,

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi}{2} \approx 7,18.$$



**Рисунок 5**

*Ответ:* При  $t=0$   $y'_x = -\pi - 3$ ,  $y''_{xx} = 2$ , касательная  $y = -6,14x + 7,18$  ,  
нормаль  $y = 0,163 \cdot x + 7,18$  ;

3.3) Найти производную функции

а)  $f(x) = (3 + \sin x)^{4x+2}$  ;                      б)  $2x^5 - 3xy^3 - 2y^4 - 1 = 0$ .

*Решение:*

а)  $f(x) = (3 + \sin x)^{4x+2}$ .

Используем логарифмическое дифференцирование:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot (\ln f(x))' = (3 + \sin x)^{4x+2} \cdot \left( \ln(3 + \sin x)^{4x+2} \right)' = \\ &= (3 + \sin x)^{4x+2} \cdot \left( (4x+2) \cdot \ln(3 + \sin x) \right)' = \\ &= (3 + \sin x)^{4x+2} \cdot \left( 4 \cdot \ln(3 + \sin x) + (4x+2) \cdot \frac{\cos x}{3 + \sin x} \right), \end{aligned}$$

$$f'(x) = 4 \cdot (3 + \sin x)^{4x+2} \cdot \ln(3 + \sin x) + (4x+2) \cdot \left( (3 + \sin x)^{4x+1} \cdot \cos x \right);$$

б)  $2x^5 - 3xy^3 - 2y^4 - 1 = 0$ .

Уравнение неявно задает функцию  $y=y(x)$ , из него может быть найдена производная  $y' = \frac{dy}{dx}$ . Продифференцируем обе части уравнения по переменной

$x$ , учитывая производную сложной функции  $(f(y))'_x = f'(y) \cdot y'$ . При этом получим уравнение  $2 \cdot 5x^4 - 3 \cdot (1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y') - 2 \cdot 4y^3 \cdot y' - 0 = 0$ .

Сгруппируем слагаемые, содержащие  $y'$  и перенесём остальные слагаемые в правую часть равенства  $y' \cdot (3x \cdot y^2 - 8y^3) = -10x^4 + 3y^3$ ,

из чего получаем 
$$y' = \frac{-10x^4 + 3y^3}{3x \cdot y^2 - 8y^3}.$$

*Ответ:* а)  $f'(x) = 4 \cdot (3 + \sin x)^{4x+2} \cdot \ln(3 + \sin x) + (4x+2) \cdot \left( (3 + \sin x)^{4x+1} \cdot \cos x \right)$ ,

б)  $y' = \frac{-10x^4 + 3y^3}{3x \cdot y^2 - 8y^3}.$

3.4) Вычислить приближенно  $\cos 59^\circ$ .

*Решение:*

Пусть  $f(x) = \cos(x)$ ,  $x = \frac{\pi \cdot 59}{180}$  (перевели градусы в радианы).

Для такой функции  $f'(x) = -\sin(x)$ .

Формула приближенных вычислений  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ .  
( по первому приближению)

Возьмём  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\Delta x = x - x_0 = \frac{-\pi}{180}$ ,

тогда  $\cos 59^\circ \approx \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180}$ ,

$$\cos 59^\circ \approx 0,5 + 0,015 = 0,515.$$

( Калькулятор дает значение 0,515038074);

*Ответ:* 0,515.

3.5) Провести полное исследование функции и построить график

а)  $y(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ ;

б)  $S(t) = (3-t) \cdot e^{t-2}$ .

*Решение:*

а)  $y(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ .

1) Область определения и область непрерывности :

Область определения функции  $D_y = \{ x \mid x \in R, x \neq 1 \}$ .

Область непрерывности совпадает с областью определения, т.к.  $y(x)$  является алгебраической функцией.

При  $x=1$  функция не определена,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \frac{2x^2}{x-1} \right) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \left( \frac{2x^2}{x-1} \right) = +\infty$ ,

т.е.  $x=1$  для функции является точкой разрыва второго рода;

2) Четность:  $y(-x) = \frac{2x^2}{-x-1}$ ,

$y(-x) \neq y(x) \Rightarrow$  нет чётности, нет симметрии относительно оси ОУ ;

$y(-x) \neq -y(x) \Rightarrow$  нет нечётности, нет симметрии относительно начала координат.

Вывод: функция *общего вида*.

Функция  $y(x)$  не периодическая;

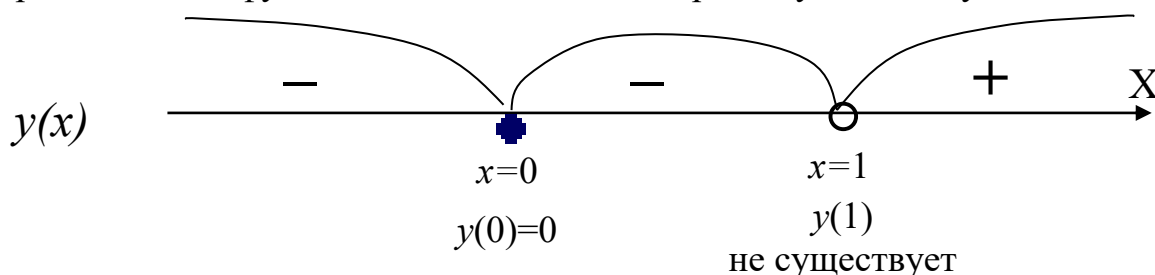
### 3) Пересечение с осями и знаки функции:

а) с ОУ т.е. при  $x=0$   $y(0)=0$ , пересечение с осью ОУ в точке  $(0; 0)$ .

б) с осью ОХ т.е. находим решение уравнения  $y(x)=0$ ,

$$y(x) = \frac{2x^2}{x-1} = 0 \text{ при } x=0, \text{ пересечение с осью ОХ в точке } (0; 0);$$

Располагая по возрастанию на числовой прямой точки пересечения графика с осью ОХ и точки, где  $y(x)$  не существует, получим три промежутка. Определим знак функции в точках каждого промежутка и получим



### 4) Асимптоты графика:

а) Вертикальные вида  $x=a$  (если хотя бы один частичный предел функции при  $x \rightarrow a \pm 0$  бесконечен).

При  $x=1$  имеется бесконечный частичный предел

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \frac{2x^2}{x-1} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \left( \frac{2x^2}{x-1} \right) = +\infty \quad (\text{в данном случае оба})$$

и в других точках функция  $y(x)$  ограничена т.к. непрерывна.

Вертикальная асимптота  $x=1$  (единственная);

б) Горизонтальные вида  $y=A$  (если предел функции при  $x \rightarrow \pm\infty$  существует, конечен и равен  $A$ ).

$$\text{Пределы } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^2}{x-1} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2}{x-1} \right) = +\infty \text{ оба бесконечные,}$$

горизонтальных асимптот нет;

в) Наклонные асимптоты, вида  $y_1=k_1 \cdot x+b_1$  и  $y_2=k_2 \cdot x+b_2$ .

Замечание: Если имеется правая (левая) горизонтальная асимптоты, то соответствующая наклонная асимптоты можно не искать.

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x^2}{x(x-1)} \right) = 2 \text{ совпадают,}$$

$$b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x^2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x}{x-1} \right) = 2.$$

Правая и левая асимптота совпадают,  
уравнение наклонной асимптоты  $y=2x+2$ ;

## 5) Производная функции:

$$y'(x) = \left( \frac{2x^2}{x-1} \right)' = 2 \cdot \frac{2x \cdot (x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}.$$

Критические точки производной:

- а)  $y'(x) = 0$  при  $2x^2 - 4x = 0$ ,  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 2$ ;  
 б)  $y'(x)$  не существует при  $x = 1$ .

Промежутки монотонности функции:

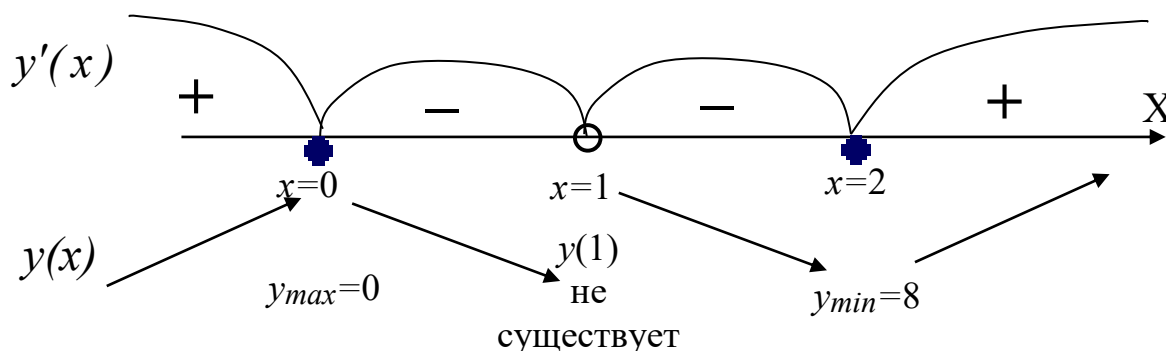
Знаки производной на каждом промежутке можно определить непосредственной подстановкой значений  $x = x_j$  из каждого промежутка знакопостоянства производной (из области определения функции). Можно находить знак производной *методом интервалов*:

производная раскладывается на множители и при переходе через критическую точку  $x = x_j$  обращается внимание на чётность (нечётность) степени множителя  $(x - x_i)^{k_j}$  в выражении производной. Если степень  $k_j$  чётная, то знак производной при переходе через её критическую точку не изменяется, знак изменяется при нечётной степени.

Разложив производную на множители, получим  $y'(x) = \frac{2x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$ .

Значения производной на самом правом промежутке ( $x > 2$ ) положительные, имеют знак “+” т.к.  $y'(3) = \frac{6}{4} > 0$ .

- При переходе через  $x=2$  знак производной изменится на “-”, т.к. множитель производной  $(x-2)$  участвует в нечётной (первой) степени;
- При переходе через  $x=1$  знак производной не изменится, т.к. множитель производной  $(x-1)$  участвует в чётной (второй) степени;
- При переходе через  $x=0$  знак производной изменится на “+”, т.к. множитель производной  $(x-0)$  участвует в нечётной (первой) степени.



**Вывод:** функция возрастает при  $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ ,  
 убывает при  $x \in (0; 1) \cup (1; 2)$ ;

### Точки экстремума:

1.  $x=0$  является точкой экстремума, причём **максимума**, т.к. в ней функция непрерывна и производная меняет знак с плюса на минус,  $y(0)=0$ ;
2.  $x=1$  не является точкой экстремума, т.к. в ней функция не определена;
3.  $x=2$  является точкой экстремума, причём **минимума**, т.к. в ней функция непрерывна и производная меняет знак с минуса на плюс,  $y(2)=8$ ;

### 6) Вторая производная:

$$y''(x) = \left( \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(4x-4) \cdot (x-1)^2 - (2x^2-4x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{4 \cdot (x-1) \cdot (x-1) - 4(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

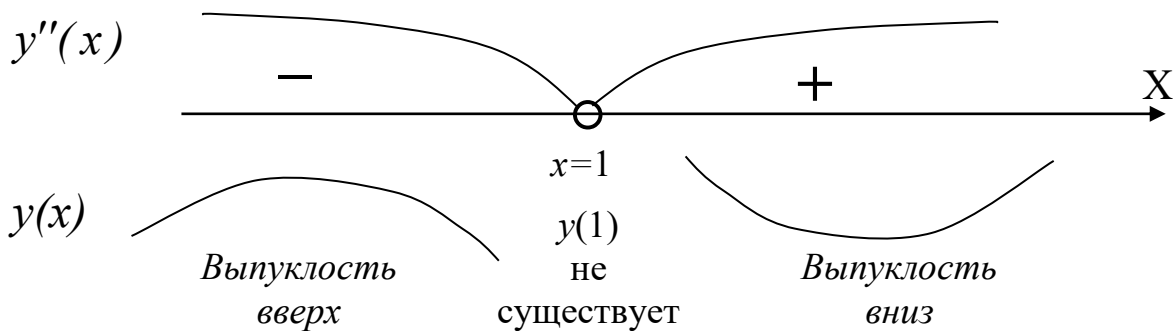
### Критические точки второй производной:

- а)  $y''(x)=0$  не имеет решения;
- б)  $y''(x)$  не существует при  $x=1$ .

### Промежутки выпуклости графика:

Определим знак второй производной на каждом промежутке её знакопостоянства (из области определения функции):

- Знак  $y''(x)$  на самом правом промежутке  $x>1$  “+” т.к.  $y''(2)=4>0$  т.е. на
- При переходе через  $x=1$  знак производной изменится на “-”, т.к.  $(x-1)$  участвует во второй производной в нечётной (третьей) степени т.е. на таком промежутке график функции выпуклый (выпуклый вверх);



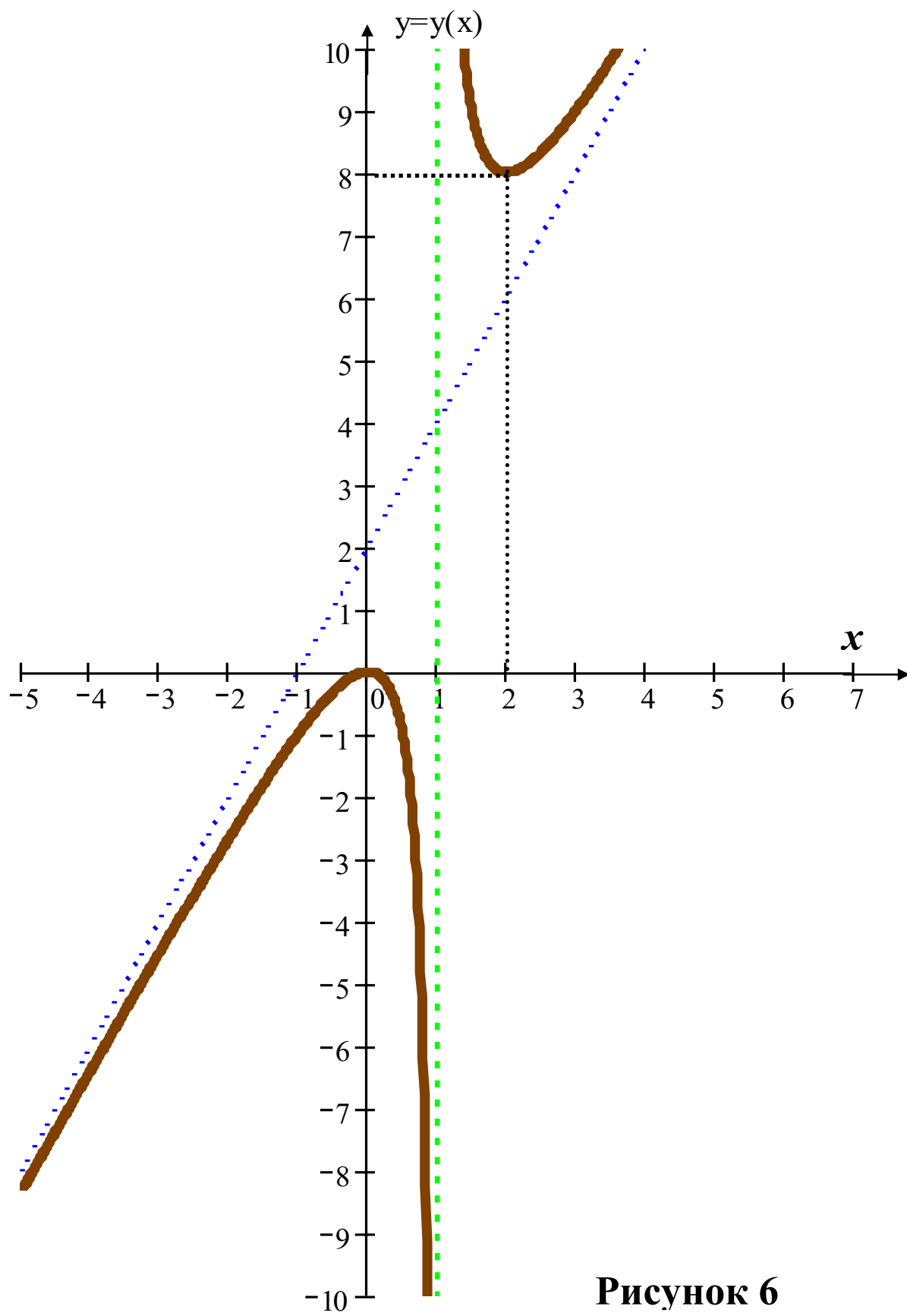
### Точки перегиба:

- а)  $x=1$  не является точкой перегиба, т.к. в ней функция не задана и разрывная;
- б) Других критических точек второй производной нет.

Точек перегиба нет;

- б) Для построения графика функции возьмём несколько вспомогательных точек из области определения функции:  $y(-3)=-9$ ,  $y(0,5)=-1$ ,  $y(4)=10+2/3$ .

С учётом результатов всех пунктов плана получим график функции, изображенный на рисунке 6.



**Рисунок 6**

№5.(б) Провести полное исследование функции  $S(t) = (3-t) \cdot e^{t-2}$  и построить график.

*Решение:*

1) Область определения и область непрерывности:

Функция определена на всей числовой прямой  $D_S = \{t \mid t \in \mathbf{R}\}$ .

Функция является элементарной т.е. её область непрерывности совпадает с областью определения. Точек разрыва нет;

2) Четность:

$$S(-t) = (3+t) \cdot e^{-t-2}, \quad S(-t) \neq S(t) \text{ и } S(-t) \neq -S(t),$$

функция *общего вида*.

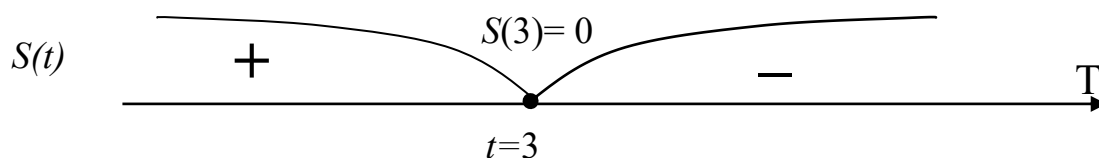
Функция  $S(t)$  *не периодическая*;

3) Пересечение с осями:

а) с осью OS: при  $t=0$   $S = (3-0) \cdot e^{0-2} = 3e^{-2} \approx 0,4$  и точка пересечения  $(0; 0,4)$  ;

б) с осью OT:  $(3-t) \cdot e^{t-2} = 0$  , его решение  $t=3$  и точка пересечения  $(3; 0)$ ;

Знаки функции



4) Асимптоты графика:

а) Вертикальных асимптот нет. т.к. функция на любом отрезке непрерывна, следовательно, ограниченная;

б) Горизонтальные асимптоты

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (S(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( \frac{3-t}{e^{2-t}} \right) = \left[ \frac{+\infty}{e^{+\infty}} \right] = 0, \text{ левая горизонтальная асимптота } S=0; \text{ ( ось OT )}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} ((3-t) \cdot e^{t-2}) = -\infty, \text{ правой горизонтальной асимптоты нет;}$$

в) Наклонные

Слева (при  $t \rightarrow -\infty$ ) не ищем т.к. имеется горизонтальная асимптота.

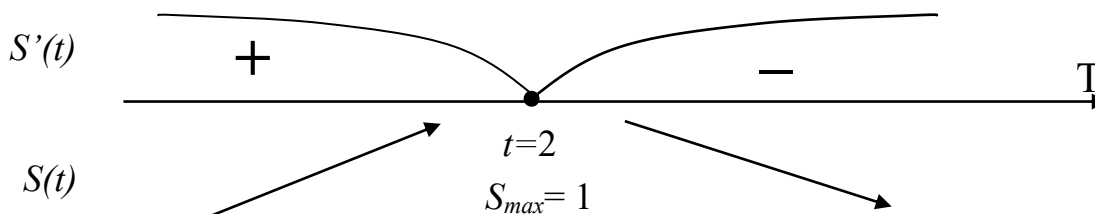
$$\text{Справа } S=k \cdot t+b, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{3-t}{t} \cdot e^{t-2} \right) = -\infty.$$

Наклонных асимптот нет;

5) Производная  $S'(t) = -1 \cdot e^{t-2} + (3-t) \cdot e^{t-2} = e^{t-2} \cdot (2-t)$ .

$S'(t) = 0$  при  $t=2$  и других критических точек производной нет.

Знаки производной:



$$S'(0) = e^0 \cdot (2-0) = 2 = 1 > 0; \quad S(2) = (3-2) \cdot e^0 = 1; \quad S'(3) = e^1 \cdot (2-3) \approx -2,71 < 0.$$

7) Вторая производная:

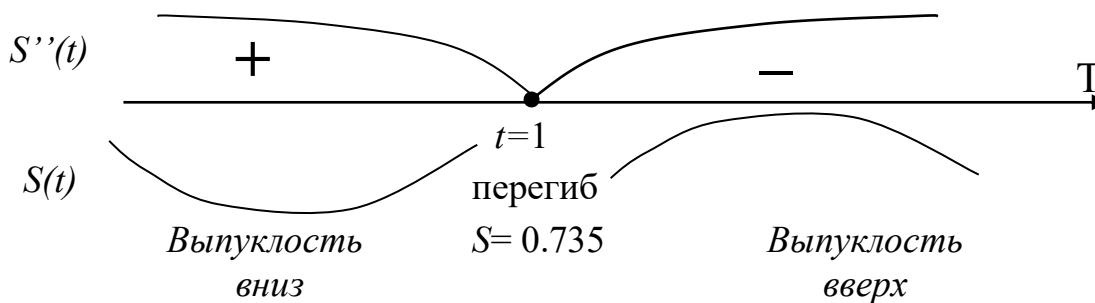
$$S''(t) = e^{t-2} \cdot (2-t) + e^{t-2} \cdot (-1) = e^{t-2} \cdot (1-t),$$

а)  $S''(t) = 0$  при  $1-t = 0$ ,  $t = 1$ ;

б)  $S''(t)$  существует при любом  $t$ ,

(других критических точек второй производной нет).

Знаки второй производной:



$$S''(0) = e^{-2} \cdot (1-0) = e^{-2} > 0; \quad S(1) = (3-1) \cdot e^{1-2} \approx 0,735; \quad S''(3) = e^1 \cdot (1-3) \approx -5,42 < 0.$$

Точка  $t=1$  является точкой перегиба графика функции;

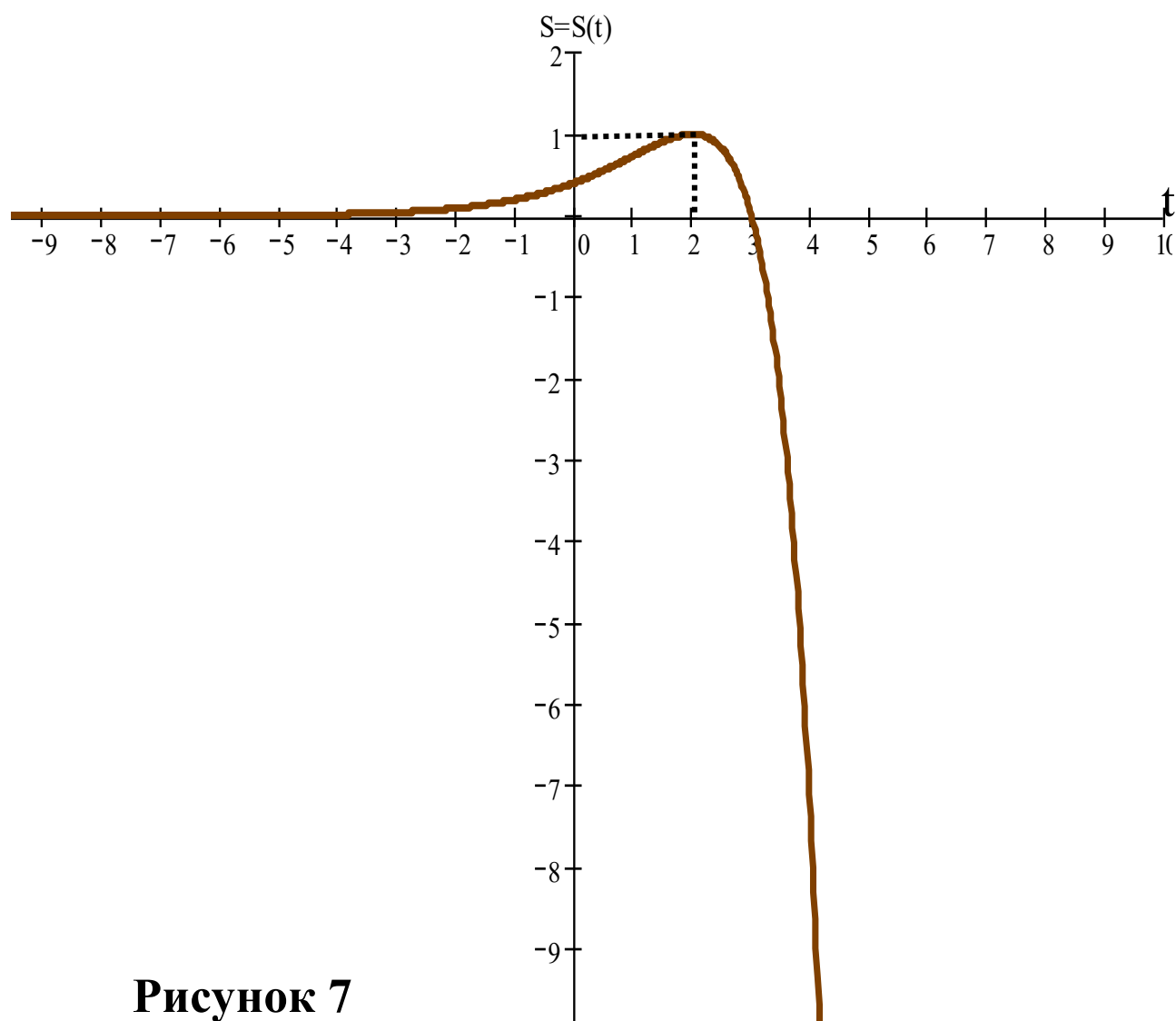
8) График функции:

Для построения графика функции возьмём несколько вспомогательных точек из области определения функции:

$$S(-1) = (3+1) \cdot e^{-3} \approx 0,2,$$

$$S(4) = (3-4) \cdot e^2 \approx -7,4.$$

С учётом результатов всех пунктов плана получим график, изображенный на рисунке 7.



**Рисунок 7**

**ДЗ-2 часть 2 Домашняя контрольная работа**  
**по теме «Интегрирование»**  
**выдаётся на 13 неделе, сдача на 18 неделе 2 семестра**

**№4 (5 баллов)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

1.  $y = (x - 2)^3, y = 4x - 8.$
2.  $y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 3).$
3.  $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$
4.  $y = \sin x \cos^2 x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$
5.  $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$
6.  $y = x^2\sqrt{4 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2).$
7.  $y = \cos x \sin^2 x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$
8.  $y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2.$
9.  $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, y = 0, x = 1, x = e^3.$
10.  $y = \arccos x, y = 0, x = 0.$
11.  $y = (x + 1)^2, y^2 = x + 1.$
12.  $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3.$
13.  $y = x\sqrt{36 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 6).$
14.  $x = \arccos y, x = 0, y = 0.$
15.  $y = x \operatorname{arctg} x, y = 0, x = \sqrt{3}.$
16.  $y = x^2\sqrt{8 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}).$
17.  $x = \sqrt{e^y - 1}, x = 0, y = \ln 2.$

18.  $y = x\sqrt{4 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2).$
19.  $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}, y = 0, x = 1.$
20.  $y = \frac{1}{1+\cos x}, y = 0, x = \pi/2, x = -\pi/2.$
21.  $x = (y - 2)^3, x = 4y - 8.$
22.  $y = \cos^5 x \sin 2x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$
23.  $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1.$
24.  $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y.$
25.  $x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, x = 0, y = 1, y = e^3.$
26.  $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, y = 0, x = 2, x = 1.$
27.  $y = x^2\sqrt{16 - x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 4).$
28.  $x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0, y = 0, y = 1.$
29.  $y = (x - 1)^2, y^2 = x - 1.$
30.  $y = x^2 \cos x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi/2).$
31.  $x = 4 - (y - 1)^2, x = y^2 - 4y + 3.$

**№5 (5 баллов)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в декартовой системе координат

$$1. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 (y \geq 2). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 (x \geq 2). \end{cases}$$

5.  $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 \ (y \geq 3). \end{cases}$
6.  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \ (0 < x < 4\pi, y \geq 3). \end{cases}$
7.  $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} \ (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$
8.  $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3} \ (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$
9.  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \ (0 < x < 6\pi, y \geq 3). \end{cases}$
10.  $\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 \ (x \geq 4). \end{cases}$
11.  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3 \ (y \geq 3). \end{cases}$
12.  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \ (0 < x < 12\pi, y \geq 9). \end{cases}$
13.  $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 \ (x \geq 4). \end{cases}$
14.  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4 \ (y \geq 4). \end{cases}$
15.  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \ (0 < x < 12\pi, y \geq 6). \end{cases}$
16.  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} \ (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$
17.  $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2\sqrt{3} \ (y \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$
18.  $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \ (0 < x < 20\pi, y \geq 15). \end{cases}$
19.  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 \ (x \geq 1). \end{cases}$
20.  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \\ y = 4 \ (y \geq 4). \end{cases}$
21.  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \ (0 < x < 2\pi, y \geq 1). \end{cases}$
22.  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ x = 1 \ (x \geq 1). \end{cases}$
23.  $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2 \ (y \geq 2). \end{cases}$

**№6 (5 баллов)** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в полярной системе координат

1.  $r = 4 \cos 3\varphi, r = 2 (r \geq 2)$ .
2.  $r = \cos 2\varphi$ .
3.  $r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi$   
( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ).
4.  $r = 4 \sin 3\varphi, r = 2 (r \geq 2)$ .
5.  $r = 2 \cos \varphi, r = 2\sqrt{3} \sin \varphi$   
( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ).
6.  $r = \sin 3\varphi$ .
7.  $r = 6 \sin 3\varphi, r = 3 (r \geq 3)$ .
8.  $r = \cos 3\varphi$ .
9.  $r = \cos \varphi,$   
 $r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4)$   
( $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$ ).
10.  $r = \sin \varphi,$   
 $r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4)$   
( $0 \leq \varphi \leq 3\pi/4$ ).
11.  $r = 6 \cos 3\varphi,$   
 $r = 3 (r \geq 3)$ .
12.  $r = \frac{1}{2} + \sin \varphi$ .
13.  $r = \cos \varphi,$   
 $r = \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .
14.  $r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4),$   
 $r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4)$   
( $\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$ ).
15.  $r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi$ .
16.  $r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi$ .
17.  $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$ .
18.  $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi$ .
19.  $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$ .
20.  $r = \frac{5}{2} \sin \varphi, r = \frac{3}{2} \sin \varphi$ .
21.  $r = \frac{3}{2} \cos \varphi, r = \frac{5}{2} \cos \varphi$ .
22.  $r = 4 \cos 4\varphi$ .
23.  $r = \sin 6\varphi$ .
24.  $r = 2 \cos \varphi, r = 3 \cos \varphi$ .
25.  $r = \cos \varphi + \sin \varphi$ .
26.  $r = 2 \sin 4\varphi$ .
27.  $r = 2 \cos 6\varphi$ .
28.  $r = \cos \varphi - \sin \varphi$ .
29.  $r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi$ .
30.  $r = 2 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi$ .
31.  $r = 6 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi$ .

**№7 (5 баллов)** Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции. В вариантах 1 – 16 ось вращения ОХ, а в вариантах 17 – 32 ось вращения ОУ.

1.  $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$
2.  $2x - x^2 - y = 0,$   
 $2x^2 - 4x + y = 0.$
3.  $y = 3 \sin x, y = \sin x,$   
 $0 \leq x \leq \pi.$
4.  $y = 5 \cos x, y = \cos x,$   
 $x = 0, x \geq 0.$
5.  $y = \sin^2 x, x = \pi/2, y = 0.$
6.  $x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1.$
7.  $y = xe^x, y = 0, x = 1.$
8.  $y = 2x - x^2, y = -x + 2,$   
 $x = 0.$
9.  $y = 2x - x^2, y = -x + 2.$
10.  $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0,$   
 $x = 1.$
11.  $y = x^2, y^2 - x = 0.$
12.  $x^2 + (y - 2)^2 = 1.$
13.  $y = 1 - x^2, x = 0,$   
 $x = \sqrt{y-2}, x = 1.$
14.  $y = x^2, y = 1, x = 2.$
15.  $y = x^3, y = \sqrt{x}.$
16.  $y = \sin \frac{\pi x}{2}, y = x^2.$
17.  $y = \arccos \frac{x}{3},$   
 $y = \arccos x, y = 0.$
18.  $y = \arcsin \frac{x}{5}, y = \arcsin x,$   
 $y = \frac{\pi}{2}.$
19.  $y = x^2, x = 2, y = 0.$
20.  $y = x^2 + 1, y = x, x = 0,$   
 $x = 1.$
21.  $y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1,$   
 $x = 0,5.$
22.  $y = \ln x, x = 2, y = 0.$
23.  $y = (x - 1)^2, y = 1.$
24.  $y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3,$   
 $y = 1.$
25.  $y = x^3, y = x^2.$
26.  $y = \arccos \frac{x}{5}, y = \arccos \frac{x}{3},$   
 $y = 0.$
27.  $y = \arcsin x, y = \arccos x,$   
 $y = 0.$
28.  $y = x^2 - 2x + 1, x = 2,$   
 $y = 0.$
29.  $y = x^3, y = x.$
30.  $y = \arccos x, y = \arcsin x,$   
 $x = 0.$
31.  $y = (x - 1)^2, x = 0,$   
 $x = 2, y = 0.$

### 3 Методика оценки достижений

#### 3.1 Для оценки достижений студента используется

##### **балльно-рейтинговая система:**

- В *каждом семестре* студент должен выполнить домашнюю контрольную работу из двух частей. После её проверки студент получает баллы (рейтинг)

| Код             | Вид оценочного средства           | Максимальный балл | Зачтённая работа, баллы | Незачёт, баллы |
|-----------------|-----------------------------------|-------------------|-------------------------|----------------|
| Дз-2<br>Часть 1 | Домашняя контрольная работа (ДКР) | 20                | 11 – 20                 | 0 – 10         |
| Дз-2<br>Часть 2 | ДКР                               | 20                | 11 – 20                 | 0 – 10         |
| Э-2             | Экзамен                           | 60                | 26 – 60                 | 0 – 25         |

- Допуском до экзамена является 25 баллов при зачтённой *каждой части* контрольной работы. При недопуске студент исправляет ошибки в своей работе либо выполняет дополнительные задания для набора не менее 25 баллов;
- На экзамене в каждом билете имеется по 6 практических задач, каждая оценивается по 10 баллов, на их выполнение даётся 2 часа. Допускается использование дополнительной литературы. Для получения оценок 4 и 5 требуется ответить на несколько теоретических вопросов без применения литературы;
- При наборе на экзамене менее 26 баллов экзамен является несданным и выставляется неудовлетворительная оценка (независимо от набранных в семестре баллов);
- Оценкой за семестр является общий суммарный рейтинг в виде суммы баллов, накопленных за семестр, и полученных на экзамене. Оценка выставляется при наборе не менее 60 баллов с указанием этой суммы и соответствующей оценки.

| Оценка по 5 бальной шкале  | Зачет      | Сумма баллов по дисциплине | Оценка (ECTS) | Градация            |
|----------------------------|------------|----------------------------|---------------|---------------------|
| 5 (отлично)                | Зачтено    | 90-100                     | A             | Отлично             |
| 4 (хорошо)                 |            | 85-89                      | B             | Очень хорошо        |
|                            |            | 75-84                      | C             | Хорошо              |
|                            |            | 70-74                      | D             | Удовлетворительно   |
|                            |            | 65-69                      |               |                     |
| 3 (удовлетворительно)      |            | 60-64                      | E             | Посредственно       |
| 2<br>(неудовлетворительно) | Не зачтено | Ниже 60                    | F             | Неудовлетворительно |

## 3.2 Вопросы экзамена

1. Определение числовой последовательности и ее предела. Свойства пределов последовательности.
2. Определение функции одной переменной, способы ее задания. Обратная функция, связь графиков взаимнообратных функций. Основные элементарные функции, их графики и основные свойства.
3. Преобразования, влияющие на график функции ( $f(x)+c$ ,  $f(x+c)$ ,  $c \cdot f(x)$ ,  $f(c \cdot x)$ ,  $|f(x)|$ ,  $f(|x-c|)$ ). Графики линейной, параболической, дробно-линейной функции и  $y=A \cdot \sin(\omega x + \omega_0)$ .
4. Определение предела функции в точке. Бесконечный предел и предел на бесконечности. Свойства пределов.
5. Бесконечно малая функция (БМ). Сравнение БМ: эквивалентность, символ "о". Первый замечательный предел, его применение. Основные эквивалентности БМ в пределах.
6. Бесконечно большая функция (ББ). Сравнение ББ: эквивалентность, символ "о". Шкала ББ при  $x \rightarrow \infty$ , её применение.
7. Связь БМ, ББ и других функций. Основные виды неопределенностей в пределах, способы их раскрытия. Второй замечательный предел, правило его применения.
8. Непрерывность функции в точке. Частичные пределы, их связь с непрерывностью. Точки разрыва функции, их классификация.
9. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства непрерывных в точке функций.
10. Свойства непрерывных на отрезке функций: сохранение знака, ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, поиск корня  $f(x)=0$  методом половинного деления, промежуточные значения.
11. Производная функции  $f(x)$ : определение, геометрический смысл с уравнением касательной и нормали, физический смысл. Свойства производных.
12. Производные основных функций ( $x^n$ ,  $a^n$ ,  $\ln(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ) с доказательствами.
13. Приращение дифференцируемой функции, понятие дифференциала и его связь с производной. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы дифференциала, его применение в приближенных вычислениях.
14. Производная обратной функции. Вывести производные  $\arcsin(x)$ ,  $\arctg(x)$ . Производная неявно заданной функции.
15. Логарифмическое дифференцирование. Понятие гиперболических функций, их производные.
16. Свойства дифференцируемых на отрезке функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
17. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора, её коэффициенты и остаточный член в формах Пеано и Лагранжа.

18. вывести разложения  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $e^x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^n$  по формуле Маклорена.
19. Производные  $y'_x(x)$ ,  $y''_{xx}(x)$  для функции, заданной параметрически.
20. Определение точки экстремума. Связь монотонности функции и знака ее производной. Теорема Ферма (необходимое условие точек экстремума).  
Достаточные условия экстремума:
  - а) с помощью знака первой производной;
  - б) с помощью производных старших порядков.
21. Алгоритм нахождения точек экстремума. Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, примеры задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.
22. Определение выпуклой (вогнутой) НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ. Связь выпуклости со знаком второй производной. Алгоритм нахождения точек перегиба.
23. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределах.
24. Понятие асимптоты графика функций, их виды и способы нахождения.
25. Общий план исследования функций и построения графика функции.
26. Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на ОТРЕЗКЕ.
27. Решение текстовых задач на оптимизацию.
28. Определение первообразной для  $f(x)$  на  $[a; b]$ , теорема о двух первообразных. Неопределенный интеграл (НИ), его свойства. Таблица основных интегралов.
29. Определенный интеграл (ОИ) для  $f(x)$ , как предел интегральных сумм, его основные свойства, теорема о среднем.
30. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной.
31. Формула Ньютона-Лейбница и её применение.
32. Замена переменной в НИ и ОИ. Интегрирование по частям в НИ, ОИ, основные случаи.
33. Вычисление некоторых НИ методом неопределенных коэффициентов.
34. Дробно-рациональная функция, алгоритм ее разложения на сумму элементарных дробей:
  - а) выделение целой части, алгоритм "деление столбиком";
  - б) разложение многочлена на неприводимые множители, кратность корня;
  - в) метод неопределенных коэффициентов разложения на элементарные дроби.
35. Интегралы от элементарных дробей. Общий план интегрирования дробно-рациональных функций.
36. Интегралы от тригонометрических функций; Основные случаи и способы интегрирования данных интегралов.

37. Интегралы от иррациональных функций. Примеры "неберущихся" интегралов.
38. Нахождение площади криволинейной трапеции и площадей плоских фигур с помощью ОИ (ограниченных  $y_i=f_i(x)$ ; параметрических заданными).
39. Площадь криволинейного сектора. Нахождение площади фигуры в полярных координатах.
40. Объем тела по поперечным сечениям. Объем тела вращения с помощью ОИ.

### 3.3 ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

#### МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Новоуральский технологический институт

Кафедра высшей математики

Направление подготовки — 15.03.05 - "Конструкторско- технологическое  
обеспечение машиностроительных производств»  
Профиль — «Технология машиностроения» (КМ-15з)  
Квалификация (степень) выпускника — академический бакалавр  
Форма обучения — Заочная  
Дисциплина — МАТЕМАТИКА, 2 СЕМЕСТР

## Экзаменационный билет №1

1) Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \cdot \sin^2(3x)}{\arcsin(2x) \cdot (1 - \cos(x))} \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-4}{x+7} \right)^{5x^2-x}.$$

2) Найти производные функций

$$\text{а) } S(p) = p^2 \cdot e^{3p-1}; \quad \text{б) } x(y) = \frac{y^3}{3y-12} + \ln(3 + \sqrt{2});$$

3) Исследовать на асимптоты график функции  $f(x) = \frac{x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{x^2 - 9};$

4) Найти  $\int \frac{2x-1}{x^2+4x-12} dx;$

5) Вычислить площадь, ограниченную кривой  $\rho(\phi) = 4 \sin^2(\phi).$

Составил: \_\_\_\_\_ Орлов Ю.В.

Зав. Кафедрой: \_\_\_\_\_ Носырев Н.А.

05.06.2016  
Новоуральск

## 4 Справочник

- Если  $\alpha = \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  (бесконечно малая функция, БМ),  
 $\beta = \beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  (БМ),  
 $\varphi = \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$  (бесконечно большая функция, ББ),  
 $\psi = \psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$  (ББ),  
 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \neq 0$  ,

то

1) При сравнении бесконечно малых вычисляется предел их частного и, в зависимости от результата

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) = \begin{cases} 1, & \text{тогда } \alpha \text{ и } \beta \text{ эквивалентны } \alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \beta \\ C \neq 0, & \text{тогда } \alpha \text{ и } \beta \text{ имеют один порядок малости } \alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} C \cdot \beta \\ 0, & \text{тогда числитель имеет больший} \\ & \text{порядок малости } \alpha = o(\beta) \\ \infty, & \text{тогда знаменатель имеет больший} \\ & \text{порядок малости } \beta = o(\alpha) \end{cases}$$

- При сравнении бесконечно больших вычисляется предел их частного и, в зависимости от результата

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\varphi}{\psi} \right) = \begin{cases} 1, & \text{тогда } \varphi \text{ и } \psi \text{ эквивалентны } \varphi \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \psi \\ C \neq 0, & \text{тогда } \varphi \text{ и } \psi \text{ имеют один порядок роста } \varphi \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} C \cdot \psi \\ 0, & \text{тогда знаменатель имеет больший} \\ & \text{порядок роста } \psi = O(\varphi) \\ \infty, & \text{тогда числитель имеет больший} \\ & \text{порядок роста } \varphi = O(\psi) \end{cases} .$$

• При арифметических действиях без неопределённости

$$\bullet \ c \cdot \alpha \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

(БМ с тем же порядком малости)

$$\bullet \ c \cdot \varphi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$$

(ББ с тем же порядком роста)

$$\bullet \ \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \quad (\text{ББ})$$

$$\bullet \ f(x) \pm \alpha \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

$$\bullet \ f(x) \pm \varphi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \quad (\text{ББ})$$

$$\bullet \ \alpha \pm \beta \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

(БМ с наименьшим из (БМ с порядком малости выше, порядков малости слагаемых) чем у каждого из сомножителей)

$$\bullet \ \varphi \pm \psi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$$

(ББ с наибольшим из с порядком роста выше, чем у порядков роста слагаемых) каждого из сомножителей)

$$\bullet \ \frac{1}{\varphi} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad (\text{БМ})$$

$$\bullet \ f(x) \cdot \alpha \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad (\text{БМ})$$

$$\bullet \ f(x) \cdot \varphi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \quad (\text{ББ})$$

$$\bullet \ \alpha \cdot \beta \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

$$\bullet \ \varphi \cdot \psi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \quad (\text{ББ})$$

$$\bullet \ \alpha \pm \varphi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \quad (\text{ББ})$$

○ Виды неопределённости в пределах:

$$\bullet \ \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{0}{0} \right]; \quad \bullet \ \frac{\varphi}{\psi} \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]; \quad \bullet \ \alpha \cdot \varphi \left[ 0 \cdot \infty \right]; \quad \bullet \ \varphi - \psi \left[ \infty - \infty \right]; \quad \bullet \ (1 + \alpha)^\varphi \left[ 1^\infty \right].$$

при одинаковом порядке роста                      с помощью 2<sup>го</sup> замечательного предела

• Основные эквивалентности в пределах:

$$\sin(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \arcsin(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{tg}(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{arctg}(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \alpha,$$

$$1 - \cos(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha^2}{2}, \quad \ln(1 + \alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \alpha, \quad \log_a(1 + \alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\ln(a)} \cdot \alpha,$$

$$\left( e^\alpha - 1 \right) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \alpha, \quad \left( (1 + \alpha)^m - 1 \right) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} m \cdot \alpha.$$

Если бесконечно малую (бесконечно большую) функцию в выражении заменить на эквивалентную, то предел выражения *не изменится*.

• **Шкала бесконечно больших функций:**

при  $x \rightarrow +\infty$

|                                             |                                                                        |
|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| • $\log_a(x) \ (a>1)$                       | .....<br>$\lg(x)$<br>$\ln(x)$<br>$\log_2(x)$<br>.....                  |
| • $x^n$                                     | .....<br>$\sqrt[3]{x}$<br>$\sqrt{x}$<br>$x$<br>$x^2$<br>$x^3$<br>..... |
| • $a^x \ (a>1)$                             | .....<br>$2^x$<br>$e^x$<br>$10^x$<br>.....                             |
| • $n! \ (x! \text{ при } x \in \mathbf{N})$ |                                                                        |
| • $x^x \ x>1$                               |                                                                        |
| • $x^{x^2} \ x>1$                           |                                                                        |
| .....                                       |                                                                        |

Стоящие ниже функции имеют **большой** порядок роста.

Среди основных элементарных функций наименьший порядок роста имеет логарифмическая функция (с ростом её основания порядок роста уменьшается) и наибольший порядок роста имеет показательная функция (с ростом её основания порядок роста возрастает).

• **Виды точек разрыва:**

- $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow x = x_0$  – точка непрерывности для  $f(x)$ ;

- $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0) \Rightarrow x = x_0$  – точка разрыва для  $f(x)$   
нулевого рода (восполнимый разрыв);

- $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A \text{ (конечное)} \\ \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = B \text{ (конечное)} \end{array} \right\} A \neq B \Rightarrow x = x_0$  – точка разрыва для  $f(x)$

первого рода (конечный скачок);

- Если хотя бы один из частичных пределов  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$

бесконечен, то  $x = x_0$  – точка разрыва *второго* рода (существенный разрыв).

- Производная функции в точке  $x_0$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f}{\Delta x} \right);$$

- Геометрически  $y'(x_0)$  равна угловому коэффициенту касательной в соответствующей точке графика, в декартовых координатах  $y'(x_0) = \operatorname{tg}(\alpha)$ ,  $\alpha$  – угол наклона касательной к графику функции в точке  $(x_0; y(x_0))$ ;
- Уравнение касательной  $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ;

- Уравнение нормали  $y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ ;

- Производная произведения  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ ;

- Производная дроби  $\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ ;

- Логарифмическая производная  $\left( (u(x))^{v(x)} \right)' = u^v \cdot \left( v' \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$ ,  
 $f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))'$ ;

- Дифференциал функции  $df|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ ;

- Дифференциал второго порядка  $d^2 f|_{x=x_0} = f''(x_0) \cdot (dx)^2$ ;

- Для функции, заданной параметрически  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

производная  $y$  по  $x$   $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=t_0} = \left( \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right)' \cdot \frac{1}{x'(t)} \right) \Big|_{t=t_0};$

- Формула Тейлора  $\Delta f(x) \approx \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{n!},$

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)}_{\text{первое приближение}} + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n;$$

## ● Таблица производных

| Функции                    | Производные                               |
|----------------------------|-------------------------------------------|
| ● $(f(x))^n$               | $n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$        |
| $c$                        | 0                                         |
| $x$                        | 1                                         |
| $x^2$                      | $2x$                                      |
| $x^3$                      | $3x^2$                                    |
| $\sqrt{x}$                 | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$                     |
| $\frac{1}{x}$              | $-\frac{1}{x^2}$                          |
| ● $a^{f(x)}$               | $a^{f(x)} \cdot \ln(a) \cdot f'(x)$       |
| $e^{u(x)}$                 | $e^{u(x)} \cdot u'(x)$                    |
| $e^{x^2}$                  | $e^{x^2} \cdot 2x$                        |
| $2^x$                      | $2^x \cdot \ln(2)$                        |
| ● $\log_a(f(x))$           | $\frac{1}{f(x) \cdot \ln(a)} \cdot f'(x)$ |
| $\ln(x)$                   | $\frac{1}{x}$                             |
| $\lg(x)$                   | $\frac{1}{x \cdot \ln(10)}$               |
| $\sin(f(x))$               | $\cos(f(x)) \cdot f'(x)$                  |
| $\cos(f(x))$               | $-\sin(f(x)) \cdot f'(x)$                 |
| $\operatorname{tg}(f(x))$  | $\frac{1}{\cos^2(f(x))} \cdot f'(x)$      |
| $\operatorname{ctg}(f(x))$ | $\frac{-1}{\sin^2(f(x))} \cdot f'(x)$     |
| $\arcsin(f(x))$            | $\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$ |

$$\begin{array}{l|l} \arccos(f(x)) & \frac{-1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x) \\ \arctg(f(x)) & \frac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x) \\ \arctg(f(x)) & \frac{-1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x) \end{array}$$

- Функция  $F(x)$  является первообразной для  $f(x)$  если  $F'(x) = f(x)$ ;
- Если  $F'(x) = f(x)$  то  $\int f(x)dx = F(x) + C$ ;
- Таблица основных интегралов

| Функция<br>$f(x)$             | Первообразная<br>$F(x)$                | Функция<br>$f(x)$                  | Первообразная<br>$F(x)$                        |
|-------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------------|
| $x^n$<br>$n \neq -1$          | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$                  | 1                                  | $x$                                            |
|                               |                                        | $a \cdot g(x) \cdot g'(x)$         | $a \cdot \frac{g^2(x)}{2}$                     |
|                               |                                        | $(ax+b)^k$                         | $\frac{(ax+b)^{k+1}}{a \cdot (k+1)}$           |
|                               |                                        | $\frac{g'(x)}{\sqrt{a+g(x)}}$      | $2 \cdot \sqrt{a+g(x)}$                        |
| $a^{b \cdot x}$               | $\frac{a^{b \cdot x}}{b \cdot \ln(a)}$ | $e^{b \cdot x}$                    | $\frac{e^{b \cdot x}}{b}$                      |
|                               |                                        | $2^{b \cdot x}$                    | $\frac{2^{b \cdot x}}{b \cdot \ln(2)}$         |
| $\frac{1}{ax+b}$              | $\frac{1}{a} \ln(ax+b)$                | $\frac{g'(x)}{g(x)}$               | $\ln(g(x))$                                    |
|                               |                                        | $\frac{x+b}{(x+b)^2 + a^2}$        | $\frac{1}{2} \ln((x+b)^2 + a^2)$               |
| $\cos(b \cdot x)$             | $\frac{\sin(b \cdot x)}{b}$            | $\cos^k(b \cdot x) \cdot \sin(bx)$ | $\frac{-\cos^{k+1}(b \cdot x)}{b \cdot (k+1)}$ |
| $\sin(b \cdot x)$             | $\frac{-\cos(b \cdot x)}{b}$           | $\sin^k(bx) \cdot \cos(bx)$        | $\frac{\sin^{k+1}(b \cdot x)}{b \cdot (k+1)}$  |
| $\frac{1}{\cos^2(b \cdot x)}$ | $\frac{1}{b} \operatorname{tg}(bx)$    | $\frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$       | $\operatorname{tg}(g(x))$                      |

|                                     |                                                            |                                           |                                                              |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{\sin^2(b \cdot x)}$       | $-\frac{1}{b} \operatorname{ctg}(bx)$                      | $\frac{g'(x)}{\sin^2(g(x))}$              | $-\operatorname{ctg}(g(x))$                                  |
| $\operatorname{tg}(a \cdot x)$      | $-\frac{1}{a} \cdot \ln  \cos(a \cdot x) $                 | $\operatorname{ctg}(a \cdot x)$           | $\frac{1}{a} \cdot \ln  \sin(a \cdot x) $                    |
| $\frac{1}{x^2 + a^2}$               | $\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$ | $\frac{1}{(x+b)^2 + a^2}$                 | $\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+b}{a}\right)$ |
| $\frac{1}{x^2 - a^2}$               | $\frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$             | $\frac{g'(x)}{(g(x))^2 - a^2}$            | $\frac{1}{2 \cdot a} \ln\left(\frac{g(x)-a}{g(x)+a}\right)$  |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$        | $\operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$            | $\frac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g^2(x)}}$       | $\operatorname{arcsin}\left(\frac{g(x)}{a}\right)$           |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$          | $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + k}\right)$                       | $\frac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x) \pm k}}$       | $\ln\left(g(x) + \sqrt{g^2(x) \pm k}\right)$                 |
| $\operatorname{sh}(ax)$             | $\frac{1}{a} \operatorname{ch}(ax)$                        | $\operatorname{sh}(g(x)) \cdot g'(x)$     | $\frac{1}{a} \operatorname{ch}(u(x))$                        |
| $\operatorname{ch}(ax)$             | $\frac{1}{a} \operatorname{sh}(ax)$                        | $\operatorname{ch}(g(x)) \cdot g'(x)$     | $\frac{1}{a} \operatorname{sh}(u(x))$                        |
| $\frac{1}{\operatorname{sh}^2(ax)}$ | $-\frac{1}{a} \operatorname{cth}(ax)$                      | $\frac{g'(x)}{\operatorname{sh}^2(g(x))}$ | $-\frac{1}{a} \operatorname{cth}(g(x))$                      |
| $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(ax)}$ | $\frac{1}{a} \operatorname{th}(ax)$                        | $\frac{g'(x)}{\operatorname{ch}^2(g(x))}$ | $\frac{1}{a} \operatorname{th}(g(x))$                        |

- Определённый интеграл  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$  ;

- Замена переменной а)

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \left[ \begin{array}{c} \text{çàí à} \\ t = u(x) \end{array} \right] = \int f(t) \cdot dt = F(t) + c = F(u(x)) + c ;$$

$$\text{б) } \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \left[ \begin{array}{c} \text{çàí à} \\ t = u(x) \\ x_1 = a \Rightarrow t_1 = u(x_1) \\ x_2 = b \Rightarrow t_2 = u(x_2) \end{array} \right] = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t) \Big|_{t_1}^{t_2} ;$$

• Интегрирование по частям

$$a) \int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \cdot dx$$

$$\text{ò.ä.} \int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du;$$

$$\acute{a}) \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \left( u(x) \cdot v(x) \right) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$\text{ò.ä.} \int_a^b u \cdot dv = \left( u \cdot v \right) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du ;$$

• Разложение на элементарные дроби

$$a) \frac{2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 17x + 9}{(x-1)(x^2+4)} \quad \text{неправильная дробь,}$$

выделение целой части и правильной дроби:

$$(x-1)(x^2+4) = x^3 - x^2 + 4x - 4,$$

$$2x^4 - x^3 + 8x^2 - 9x - 15 \Big| \underline{x^3 - x^2 + 4x - 4} \quad \longleftarrow \text{делитель}$$

$$\underline{2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x} \quad | \quad 2x + 1 \quad \longleftarrow \text{частное}$$

$$x^3 - x - 15$$

$$\underline{x^3 - x^2 + 4x - 4}$$

$$x^2 - 5x - 11 \quad \longleftarrow \text{остаток}$$

$$2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 17x + 9 = (2x + 1) \cdot (x^3 - x^2 + 4x - 4) + x^2 - 5x - 11$$

,

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 17x + 9}{(x-1)(x^2+4)} = 2x + 1 + \frac{x^2 - 5x - 11}{(x-1)(x^2+4)};$$

$$б) \frac{x^2 - 5x - 11}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B \cdot x + C}{x^2+4},$$

$$\frac{x^2 - 5x - 11}{(x-1)(x^2 + 4)} = \frac{A \cdot (x^2 + 4) + (x-1) \cdot (B \cdot x + C)}{(x-1)(x^2 + 4)},$$

$$A \cdot (x^2 + 4) + (x-1) \cdot (B \cdot x + C) = x^2 - 5x - 11$$

$$Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx - Bx - C = x^2 - 5x - 11,$$

$$(A+B)x^2 + (C-B)x + (4A-C) = 1 \cdot x^2 + (-5) \cdot x + (-11)$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C-B=-5 \\ 4A-C=-11 \end{cases}, \quad A=3, B=4, C=-1$$

$$\frac{x^2 - 5x - 11}{(x-1)(x^2 + 4)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{4 \cdot x - 1}{x^2 + 4},$$

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 17x + 9}{(x-1)(x^2 + 4)} = 2x + 1 + \frac{-3}{x-1} + \frac{4 \cdot x - 1}{x^2 + 4};$$

- Примеры разложений правильной дроби (дробно-рациональной функции) на сумму элементарных дробей

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x+2)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{D}{x-5},$$

$$\frac{2x^2 + x + 7}{(x-1)^3 \cdot (x+2)^2} = \left( \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} \right) + \left( \frac{A_4}{x+2} + \frac{A_5}{(x+2)^2} \right),$$

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(\underbrace{x^2 + x + 10}_{D < 0})} = \frac{A}{x-1} + \frac{B \cdot x + C}{x^2 + x + 10},$$

число коэффициентов каждый раз равно порядку многочлена в исходном знаменателе;

- Интегралы от элементарных дробей:

$$1) \int \frac{3}{x-5} dx = \ln(|x-5|) + c;$$

$$2) \int \frac{7}{(x-5)^3} dx = \frac{-7}{2(x-5)^2} + c;$$

$$3) \int \frac{5}{x^2 + 7^2} dx = \frac{5}{7} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{7}\right) + c;$$

$$4) \int \frac{3x+7}{x^2+2x+6} dx = \int \frac{3x+7}{(x^2+2x+1)-1+6} dx = \int \frac{3x+7}{(x+1)^2+5} dx =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \text{замена} \\ t = x+1, \\ x = t-1, \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{3(t-1)+7}{t^2+5} dt = \int \frac{3t+4}{t^2+5} dt =$$

$$= \int \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{2t}{t^2+5} + \frac{4}{t^2+(\sqrt{5})^2} \right) dt = \frac{3}{2} \ln|t^2+5| + \frac{4}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + c =$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+6| + \frac{4}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + c;$$

5) Интеграл вида  $J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$  при  $n \in \mathbb{N}$  находится по

формуле

$$J_n = \frac{1}{2a^2 \cdot (n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot J_{n-1};$$

• Интегрирование тригонометрических функций

Пусть  $R(u, v)$ -рациональное выражение от  $u, v$ .

Тогда

а)  $\int R(\cos(x), \sin(x)) dx$  находится с помощью универсальной

подстановки

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} \cdot dt,$$

получим интеграл от дробно-рациональной функции;

б)  $\int R(\cos^2(x), \sin^2(x))dx$  или при чётности подынтегральной функции относительно синуса и косинуса находится с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg}(x), \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{1}{1+t^2} \cdot dt;$$

в)  $\int \sin^m(x) \cdot \cos^n(x) dx$

в.1)  $m=1, n$  – любое  $\Rightarrow$  замена  $t = \cos(x), \sin(x)dx = -dt$ ;

в.2)  $n=1, m$  – любое  $\Rightarrow$  замена  $t = \sin(x), \cos(x)dx = dt$ ;

в.3)  $m$  – нечётное положительное,  $n$  – любое  $\Rightarrow$  замена  $t = \cos(x),$

$$\begin{aligned} \sin^5(x) \cdot \cos^n(x) dx &= \sin^4(x) \cdot \cos^n(x) \cdot \sin(x) dx = \\ &= (1 - \cos^2(x))^2 \cdot \cos^n(x) \cdot \sin(x) dx = (1 - t^2)^2 \cdot t^n \cdot (-dt); \end{aligned}$$

$n$  – нечётное положительное,  $m$  – любое  $\Rightarrow$  замена  $t = \sin(x),$

$$\begin{aligned} \cos^7(x) \cdot \sin^n(x) dx &= \cos^6(x) \cdot \sin^n(x) \cdot \cos(x) dx = \\ &= (1 - \sin^2(x))^3 \cdot \sin^n(x) \cdot \cos(x) dx = (1 - t^2)^3 \cdot t^n \cdot dt; \end{aligned}$$

в.5)  $n, m$  – чётные положительные числа, тогда каждую степень понижают вдвое по формулам

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \\ \sin(x) \cdot \cos(x) &= \frac{1}{2} \sin(2x); \end{aligned}$$

г) При интегрировании произведения тригонометрических функций используются формулы

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \\ \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)), \\ \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)); \end{aligned}$$

- Площадь фигуры в декартовых координатах:

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью ОХ, прямыми  $x = a$  слева,  $x = b$  справа, и графиком функции  $y = f(x)$

при условии  $\forall x \in [a; b] \quad f(x) \geq 0 \quad S_{\text{криволинейной трапеции}} = \int_a^b f(x) dx;$

Если  $\forall x \in [a; b] \quad f(x) \leq 0$ , то  $S_{\text{криволинейной трапеции}} = -\int_a^b f(x) dx;$

б) Площадь между графиком  $x = x(y)$  и осью ОУ

$$S_{\text{между графиком и осью ОУ}} = \int_{y_1}^{y_2} x(y) dy$$

в) Если фигура ограничена в декартовых координатах графиком функции  $y = f_1(x)$  снизу, графиком  $y = f_2(x)$  сверху,

вертикальными прямыми  $x = a$  слева и  $x = b$  справа, то

$$S_{\text{фигуры}} = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx;$$

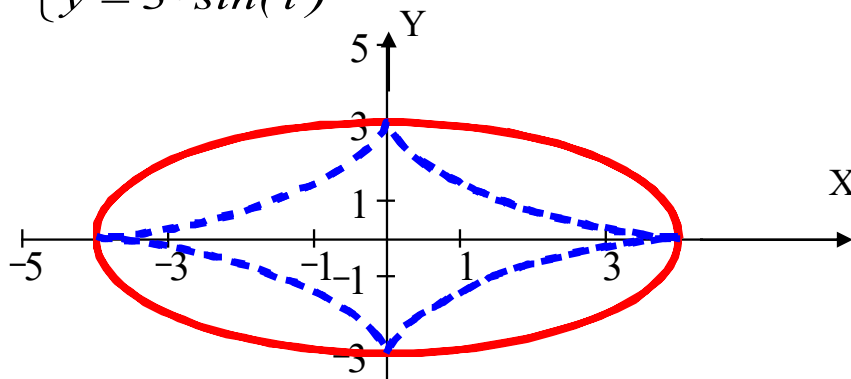
- Площадь между параметрически заданной линией  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

при  $t_1 \leq t \leq t_2$  и осями декартовой системы координат:

г.1) С осью ОХ  $S_x = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt \right|;$

г.2) С осью ОУ  $S_y = \left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y'(t) dt \right|;$

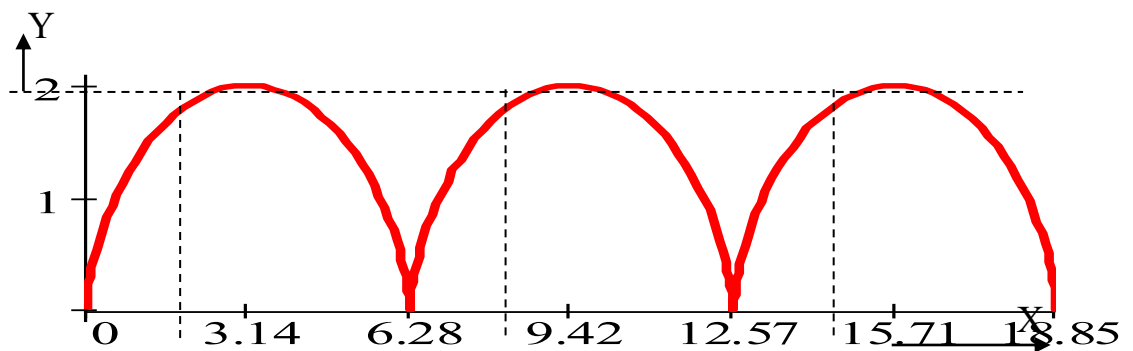
- Линия  $\begin{cases} x = 4 \cdot \cos(t) \\ y = 3 \cdot \sin(t) \end{cases}$  является эллипсом с полуосями 4 и 3.



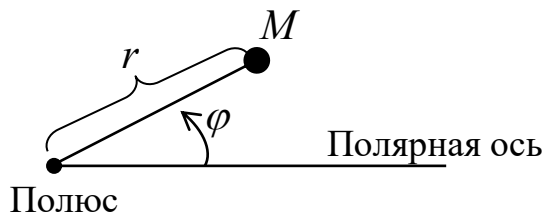
- $$\begin{cases} x = 4 \cdot \cos^3(t) \\ y = 3 \cdot \sin^3(t) \end{cases};$$

- Циклоида 
$$\begin{cases} x = a(t - \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$
 (заданная параметрически)

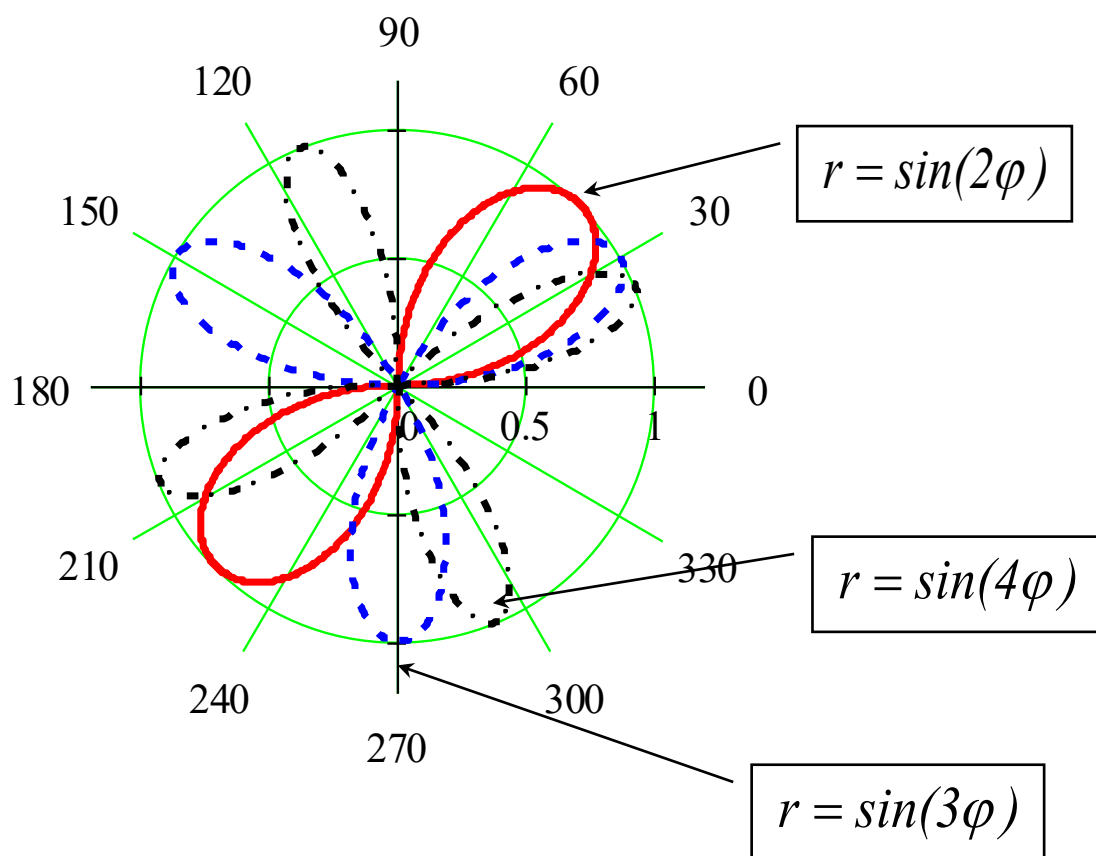
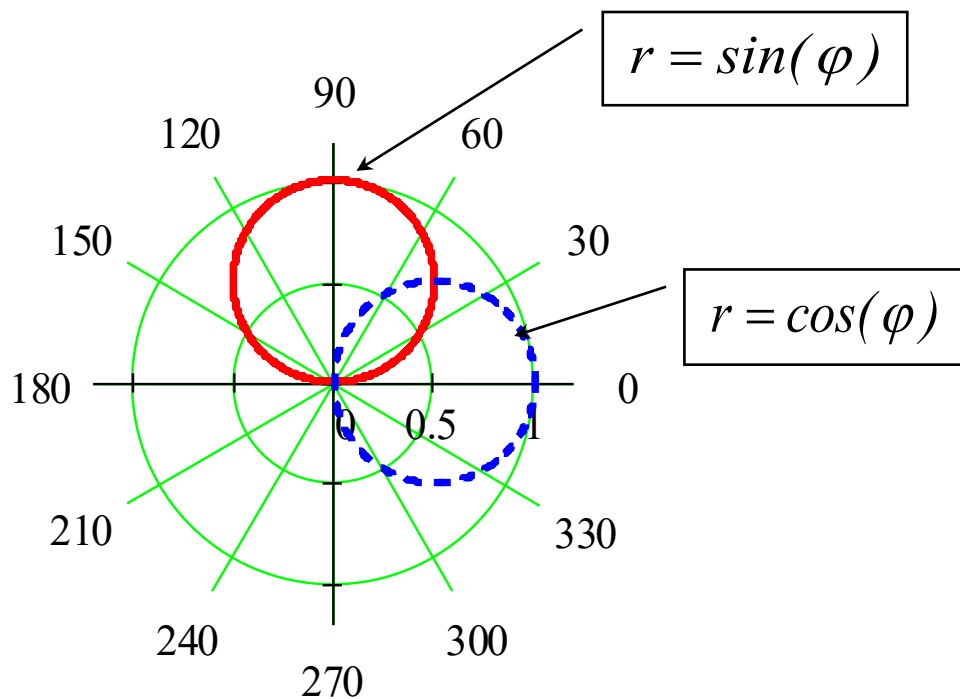
При  $a=1$



- Линии в полярных координатах  $(r; \varphi)$   
 $\varphi$ -угол поворота от полярной оси (оси ОХ) против часовой стрелки,  
 $r$ -расстояние до полюса (начала координат).



Примеры линий в полярных координатах



- Площадь в полярных координатах:  
Если фигура ограничена исходящими из полюса лучами  $\varphi = \varphi_1$ ,

$\varphi = \varphi_2$  и линией  $r = r(\varphi)$ , то площадь такого криволинейного

сектора 
$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(r(\varphi))^2}{2} d\varphi;$$

Если фигура ограничена исходящими из полюса лучами  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\varphi = \varphi_2$  и линиями  $r = r_1(\varphi)$  ближе к полюсу,  $r = r_2(\varphi)$  дальше от

полюса, то площадь такой фигуры 
$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( (r_2(\varphi))^2 - (r_1(\varphi))^2 \right) d\varphi;$$

- **Объём тела**

Если для любой проекции  $x \in [a; b]$  тела на ось ОХ известна площадь поперечного сечения  $S(x)$  такого тела,

то его объём тела 
$$V = \int_a^b S(x) dx;$$

- Если в плоскости  $XOY$  задана линия  $y = f(x)$  и при  $x \in [a; b]$  она вращается вокруг оси  $OX$ , то объём тела вращения

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx;$$

- Если в плоскости  $XOY$  задана линия  $x = g(y)$  и при  $y \in [y_1; y_2]$  она вращается вокруг оси  $OY$ , то объём тела вращения

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} (g(y))^2 dy.$$

## 5 Рекомендуемая литература

### 5.1 Основная литература:

1. **517(075) Ш 63**

**Шипачев, В. С.** Высшая математика : учеб. пособие для бакалавров / В. С. Шипачев. - 8-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, **2012**. - 447 с. - (Бакалавр, Базовый курс). - Рек. М-вом образования и науки РФ. - ISBN 978-5-9916-2031-4: 316-91.

**Кол-во экземпляров:** всего - **10**

2. **517(075) Б 74**

**Богомолов Н. В.** Математика : учеб. для бакалавров / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, **2013**. - 396 с. - (Бакалавр, Базовый курс). - Допущено М-вом образования и науки РФ. - ISBN 978-5-9916-2568-5 : 336-55.

**Кол-во экземпляров:** всего - **15**

3. **Фролов С.В.** Высшая математика [*Электронный ресурс*]: учеб. пособие / Фролов С.В., Багаутдинова А.Ш.— [*Электрон. текстовые данные*].— СПб.: ГИОРД, **2012**.— 616 с.— Режим доступа: ЭБС «IPRbooks», по паролю

4. **Туганбаев А. А.** Основы высшей математики : учеб. пособие для ВПО/А. А. Туганбаев. - 1-е изд. [*Электронный ресурс*] — СПб. : Лань, **2011**. — 491 с. - Режим доступа «ЭБС ЛАНЬ»

### 5.2 Дополнительная литература:

5. **517(075) Б 50**

**Бермант А. Ф.** Краткий курс математического анализа : учеб. для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - 10-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар : Лань, 2003. - 736 с. - (Учебники для вузов, Специальная литература). - Библиогр.: с. 736. - ISBN 5-8114-0499-9 : 280-00.

**Кол-во экземпляров:** всего - **30**

6. **517(075) Д 17**

**Данко П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003. - 416 с. : ил. - С решениями. - ISBN 5-329-00528-0 : 72-00. - ISBN 5-94666-009-8 : 65-00. - ISBN 5-329-00327-X.

**Кол-во экземпляров:** всего - **52**

7. **517 3-17**

**Зайцев И. А.** Высшая математика : [учеб. пособие] / И. А. Зайцев. - 4-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2005. - 398 с. : ил. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 392. - Рек. М-вом образования РФ для с.-х. вузов. - ISBN 5-7107-9071-0 : 146-85. **Кол-во экземпляров:** всего - **25**

### **5.3 Методическое обеспечение**

8. Орлов Ю.В. Производная функции одной переменной .  
Учебно – методическое пособие.  
– Новоуральск, НТИ НИЯУ МИФИ 2013.-42 с.
9. Орлов Ю.В. «Интегрирование». Учебно – справочное пособие по курсу  
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» для студентов всех специальностей заочной  
формы обучения. Новоуральск, изд. НТИ НИЯУ МИФИ 2013.– 32 с.

### **5.4 Информационное обеспечение (включая перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»)**

1 <http://nsti.ru>

2 научная библиотека e-librari

3 ЭБС «Лань»

4 ЭБС «IPRbooks»



Орлов Ю.В. Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины  
«Математика», 2 семестр для бакалавров заочной формы обучения  
профиля 15.03.05 «Технология машиностроения».  
– Новоуральск, изд. НТИ НИЯУ МИФИ, 2025 – 88 с.

Макет подготовлен на кафедре ОНД НТИ НИЯУ МИФИ

Подписано в печать \_\_\_\_\_ Формат А5 Гарнитура

Печать плоская. Усл-печ. л. \_\_\_\_\_ Тираж \_\_\_\_\_ экз. Заказ \_\_\_\_\_

Издательство Новоуральского технологического института НИЯУ МИФИ,  
624130, г. Новоуральск, ул. Ленина 85, НТИ НИЯУ МИФИ